

Introducción

a números complejos I

Números complejos, álgebra lineal compleja y qubits

Intuición geométrica, interpretación física y computacional, desarrollo y visualización en Python.



Secuencia académica

El módulo comienza con la necesidad matemática de ampliar los reales, continúa con el plano complejo y sus representaciones, y después usa ese lenguaje para construir vectores complejos, productos internos, estados cuánticos y operadores unitarios elementales.

Criterio pedagógico

La matemática aparece como herramienta para interpretar amplitudes, normas y transformaciones. Las derivaciones extensas se reducen a los pasos indispensables y se acompañan de lectura geométrica y computacional.



Números complejos

Representar un complejo en forma rectangular, polar y exponencial; calcular conjugado, módulo y argumento; y explicar geoméricamente suma, producto y conjugación.

Álgebra lineal y cuántica

Usar vectores complejos normalizados, producto interno complejo, bases ortonormales, matrices unitarias, operadores de Pauli, Hadamard y regla de Born para probabilidades de medición.

Python científico

Implementar números complejos, arreglos de NumPy, productos internos, adjuntas y visualizaciones con Matplotlib sin depender de macros o sintaxis ambigua.



Evidencia conceptual

El contenido de partida apunta a conjugación compleja, forma polar, matrices unitarias, definición de qubit, compuertas controladas, probabilidades de medición, normalización, bras como conjugados transpuestos y operadores elementales.

Reconstrucción universitaria

Para que esos elementos no queden como técnicas aisladas, se organizan alrededor de una pregunta: por qué la computación cuántica necesita espacios vectoriales complejos y transformaciones que preservan norma.





Lectura del mapa

El plano complejo entrega una interpretación geométrica de cada coeficiente. Al reunir coeficientes en vectores, se obtiene el lenguaje de estados. Al organizar transformaciones como matrices unitarias, se obtiene el lenguaje de la evolución ideal.



Problema original

La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene solución real. Durante siglos, expresiones de este tipo aparecieron en procedimientos algebraicos correctos, pero quedaban fuera del sistema numérico disponible.

Necesidad conceptual

Introducir una unidad con cuadrado negativo no fue una licencia simbólica arbitraria. Fue una forma de cerrar el álgebra y permitir que ecuaciones polinomiales se trataran dentro de un marco uniforme.

Implicación moderna

En física y computación cuántica, los complejos no aparecen solo para resolver ecuaciones. Aparecen porque describen de manera compacta magnitudes, orientaciones y cambios lineales que preservan estructura.



Geometría incompleta

Los reales viven en una recta. Multiplicar por un real positivo estira y multiplicar por un real negativo invierte orientación, pero no produce rotaciones continuas en el plano.

Problema que se supera

Muchos sistemas físicos oscilan o se describen naturalmente con dos coordenadas acopladas. Si se fuerza todo a una sola recta real, la notación pierde simetría y la operación geométrica queda oculta.

Papel de $\mathbb{C}$

Los complejos convierten un punto del plano en un solo objeto algebraico. Esa unificación permite sumar como vectores y multiplicar como combinación de escala y rotación.



Definición formal de $\mathbb{C}$

Tipo: Concepto

Construcción

El conjunto de números complejos se define como $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. El número a es la parte real y b es la parte imaginaria.

Qué problema resuelve

Esta definición permite operar con pares reales como si fueran números: existe suma, producto, identidad aditiva, identidad multiplicativa e inversos multiplicativos para elementos no nulos.

Implicación académica

La extensión de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ conserva el álgebra conocida y agrega una geometría plana que será indispensable para interpretar amplitudes complejas.



Separación de componentes

Para $z = a + bi$, escribimos $\text{Re}(z) = a$ e $\text{Im}(z) = b$. Esta separación indica dos coordenadas geométricas, no dos grados diferentes de realidad matemática.

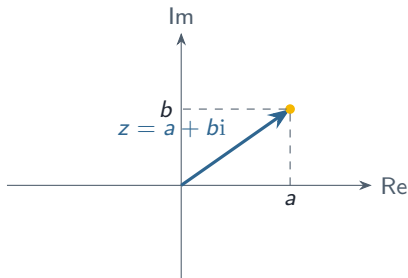
Papel operativo

Extraer partes real e imaginaria permite calcular conjugados, módulos, argumentos y productos internos. También permite depurar código, porque Python representa $a + bi$ como `'a+bj'`.

Interpretación

La parte real coloca el punto sobre el eje horizontal; la parte imaginaria determina su desplazamiento vertical.





Lectura geométrica

El complejo $z = a + bi$ se representa como el punto (a, b) . La misma entidad puede verse como punto, vector desde el origen o coeficiente algebraico.

Valor para el curso

Esta visualización permite interpretar conjugación como reflexión, módulo como distancia y argumento como ángulo.

Definición

La forma rectangular escribe un complejo como $z = a + bi$. Es la representación más directa para sumar, restar y extraer componentes.

Por qué se introduce

En cálculos algebraicos elementales, la forma rectangular permite agrupar términos reales e imaginarios sin traducir continuamente a geometría angular.

Implicación computacional

Python y NumPy muestran por defecto números complejos en una forma equivalente a la rectangular, usando 'j' para la unidad imaginaria.



Suma como operación geométrica

Tipo: Concepto

Regla algebraica

Si $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di$, entonces $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$.

Interpretación

La suma compleja es suma vectorial en el plano. Cada componente se desplaza de manera independiente, de modo que el resultado corresponde a concatenar desplazamientos.

Papel conceptual

Esta operación prepara la intuición para vectores complejos: cada componente puede ser un complejo, pero la idea de combinación lineal sigue siendo la misma.



Ejemplo: suma en forma rectangular

Tipo: Ejemplo

Problema

Calcular $(2 + 3i) + (-1 + 4i)$ e interpretar el resultado.

Desarrollo

Se suman partes reales con partes reales y partes imaginarias con partes imaginarias:
 $(2 - 1) + (3 + 4)i = 1 + 7i$.

Interpretación

El punto final se obtiene desplazando dos unidades a la derecha y tres hacia arriba, seguido de un desplazamiento una unidad a la izquierda y cuatro hacia arriba. La operación conserva la lectura geométrica del plano.



Regla algebraica

El producto se obtiene distribuyendo y usando $i^2 = -1$. Para $(a + bi)(c + di)$, el resultado es $(ac - bd) + (ad + bc)i$.

Por qué importa

A diferencia de la suma, el producto no solo combina coordenadas: cambia escala y orientación. Por eso la forma polar será más natural para multiplicar.

Implicación

La multiplicación compleja es el primer ejemplo de una operación algebraica con significado geométrico no trivial.



Definición

El conjugado de $z = a + bi$ es $\bar{z} = a - bi$. Conserva la parte real y cambia el signo de la parte imaginaria.

Problema que resuelve

La conjugación permite convertir productos complejos en cantidades reales no negativas, porque $z\bar{z} = |z|^2$.

Interpretación geométrica

En el plano complejo, la conjugación refleja el punto respecto al eje real. Esta operación será la base de productos internos complejos y bras cuánticos.



Ejemplo: conjugado en Python

Tipo: Ejemplo

Problema

Calcular el conjugado de $z = 2 + 3i$ usando Python.

Desarrollo

Python usa 'j' para representar la unidad imaginaria, por lo que se escribe ' $z = 2 + 3j$ '. El método '`z.conjugate()`' devuelve el complejo conjugado.

Interpretación

La operación no cambia la distancia al origen; solo refleja el punto. El resultado representa $2 - 3i$, no una pérdida de información.

```
z = 2 + 3j
print(z.conjugate())
```



Definición

El módulo de $z = a + bi$ es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Es la distancia desde el origen hasta el punto (a, b) .

Por qué fue necesario

En los reales, el valor absoluto mide tamaño con independencia del signo. En los complejos se necesita una noción análoga que mida tamaño sin depender de dirección en el plano.

Conexión cuántica

Las probabilidades de medición se obtienen a partir de módulos cuadrados de amplitudes complejas. Por ello el módulo no es una operación auxiliar, sino una pieza central del lenguaje cuántico.



Argumento de un complejo

Tipo: Concepto

Definición

El argumento de un complejo no nulo es un ángulo θ tal que el vector que representa a z forma ese ángulo con el eje real positivo.

Cuidado matemático

El argumento no es único: si θ describe el punto, también lo describe $\theta + 2\pi k$. En cómputo se usa una rama principal, normalmente obtenida con `'atan2'` o `'cmath.phase'`.

Valor conceptual

El argumento separa la información direccional de la información de tamaño. Esta separación será útil para interpretar la exponencial compleja.



Definición

Todo complejo no nulo puede escribirse como $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, donde $r = |z|$ y θ es un argumento.

Qué problema resuelve

La forma polar hace transparente la multiplicación: los módulos se multiplican y los ángulos se suman. Lo que era opaco en coordenadas rectangulares se vuelve geoméricamente directo.

Implicación

El mismo número complejo puede describirse como coordenada rectangular o como magnitud con dirección. Elegir la representación correcta simplifica el problema.



Conversión rectangular a polar

Tipo: Método

Procedimiento

Para $z = a + bi$, se calcula $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y se toma $\theta = \text{atan2}(b, a)$. La función de dos argumentos ubica correctamente el cuadrante.

Justificación

Las coordenadas rectangulares son proyecciones: $a = r \cos \theta$ y $b = r \sin \theta$. Invertir esas relaciones exige conservar el signo de ambas coordenadas.

Uso computacional

En Python, `'abs(z)'` devuelve el módulo y `'cmath.phase(z)'` o `'math.atan2(z.imag,z.real)'` devuelve un argumento principal.



Ejemplo: forma polar de $2 - 3i$

Tipo: Ejemplo

Problema

Encontrar una descripción polar para $z = 2 - 3i$.

Desarrollo

El módulo es $r = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$. El argumento principal es $\theta = \text{atan2}(-3, 2)$, un ángulo ubicado en el cuarto cuadrante.

Interpretación

El número está a distancia $\sqrt{13}$ del origen y por debajo del eje real. La forma polar expresa precisamente distancia y orientación.



Conversión polar a rectangular

Tipo: Método

Procedimiento

Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, entonces $z = r \cos \theta + r \sin \theta i$.

Por qué importa

Muchas expresiones teóricas aparecen en forma polar o exponencial, pero los cálculos de componentes y probabilidades suelen requerir forma rectangular.

Interpretación

Convertir de polar a rectangular equivale a proyectar un vector de longitud r sobre los ejes real e imaginario.



Fórmula de Euler

Tipo: Concepto

Enunciado

La identidad de Euler establece $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Por qué es fundamental

Esta fórmula une exponenciales, trigonometría y geometría circular. Permite escribir números de módulo uno de forma compacta y manipular ángulos con reglas algebraicas de exponentes.

Alcance en este módulo

Se usa como lenguaje para representar puntos del círculo unidad y para convertir expresiones exponenciales a forma rectangular. Herramientas geométricas más avanzadas se dejan para módulos posteriores.



Ejemplo: $2e^{i\pi/3}$ en forma rectangular

Tipo: Ejemplo

Problema

Convertir $2e^{i\pi/3}$ a forma rectangular.

Desarrollo

Por Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Entonces $2e^{i\pi/3} = 2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3) = 1 + \sqrt{3}i$.

Interpretación

El módulo es 2 y el ángulo es 60° . La parte real y la imaginaria son las proyecciones del vector sobre los ejes.



Exponencial compleja

Tipo: Concepto

Idea

La exponencial compleja permite escribir $re^{i\theta}$ como una forma polar compacta. El módulo se expresa con r y el ángulo con el exponente imaginario.

Problema que resuelve

Evita cargar expresiones trigonométricas largas cuando lo importante es sumar ángulos o multiplicar factores.

Lectura geométrica

Cuando el módulo es uno, $e^{i\theta}$ describe un punto sobre el círculo unidad. En este primer módulo esa interpretación basta para entender conversiones y operaciones básicas.



Multiplicación en forma polar

Tipo: Concepto

Regla

Si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, entonces $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$.

Interpretación

La multiplicación compleja combina dos acciones: escalar por $r_1 r_2$ y sumar orientaciones. Esta es la razón por la que la forma polar simplifica productos.

Implicación

La misma operación algebraica puede verse como transformación geométrica. Esta doble lectura será útil al estudiar operadores unitarios.



División e inversos complejos

Tipo: Concepto

Problema que resuelve

Para dividir por un complejo no nulo se necesita eliminar la unidad imaginaria del denominador sin cambiar el valor de la expresión.

Procedimiento

Se multiplica numerador y denominador por el conjugado del denominador. Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \bar{z} / |z|^2$.

Interpretación

El inverso deshace simultáneamente escala y orientación. La conjugación invierte la orientación angular y el módulo cuadrado ajusta la escala.



Suma

La suma desplaza puntos en el plano. Su efecto depende de la posición relativa de los vectores y conserva la intuición de traslación.

Producto

El producto reescala y cambia orientación. En forma polar, este comportamiento se expresa de manera directa como producto de radios y suma de ángulos.

Conjugación

La conjugación refleja el plano respecto al eje real. Es una transformación geométrica simple que tendrá consecuencias profundas en álgebra lineal compleja.



Síntesis

Los complejos extienden los reales para describir el plano con una aritmética coherente. La forma rectangular favorece suma y componentes; la forma polar favorece multiplicación e interpretación angular.

Transición

El siguiente paso es organizar números complejos en vectores. En ese contexto, conjugación y módulo dejan de ser operaciones aisladas y se convierten en la base de norma, producto interno y medición.



Ejercicio integrado: rectangular a polar

Tipo: Ejercicio

Enunciado

Dado $z = -1 + \sqrt{3}i$, obtener módulo y un argumento principal.

Desarrollo

El módulo es $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. El punto está en el segundo cuadrante, con referencia angular $\pi/3$, por lo que un argumento principal es $2\pi/3$.

Interpretación

La forma polar es $2e^{2\pi i/3}$. La información no cambió; solo se expresó como distancia y dirección.



Variación: polar a rectangular

Tipo: Ejercicio

Enunciado

Convertir $3e^{-i\pi/6}$ a forma rectangular.

Desarrollo

Usando Euler, $3e^{-i\pi/6} = 3(\cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6)) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.

Interpretación

El signo negativo del ángulo coloca el punto por debajo del eje real. La forma rectangular muestra explícitamente esa coordenada imaginaria negativa.



Python: tipo 'complex'

Tipo: Método

Representación

Python usa 'j' para la unidad imaginaria. La expresión matemática $2 + 3i$ se escribe '2+3j'.

Problema que resuelve

El tipo 'complex' permite experimentar directamente con conjugación, módulo, suma y producto sin construir manualmente pares ordenados.

Uso correcto

La sintaxis '2+3i' no representa un complejo en Python; 'i' se interpretaría como nombre de variable.

```
z = 2 + 3j
w = -1 + 4j
print(z + w)
print(z * w)
print(type(z))
```


Herramientas

Para $z = a + bj$, Python ofrece `z.real`, `z.imag`, `z.conjugate()` y `abs(z)`.

Lectura matemática

Estas operaciones corresponden a $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $\bar{z}$ y $|z|$.

Criterio académico

El objetivo no es memorizar métodos, sino reconocer qué operación matemática implementa cada instrucción.

```
z = 2 - 3j
print(z.real)
print(z.imag)
print(z.conjugate())
print(abs(z))
```

Procedimiento

El módulo se obtiene con `'abs(z)'`. El argumento principal se puede obtener con `'cmath.phase(z)'` o con `'math.atan2(z.imag, z.real)'`.

Por qué importa

Usar `'atan2'` evita errores de cuadrante que aparecen si se intenta reconstruir el ángulo solo con una razón trigonométrica.

Interpretación

La salida polar es una descripción geométrica, no una estructura distinta del número complejo.

```
import cmath, math
z = 2 - 3j
print(abs(z))
print(cmath.phase(z))
print(math.atan2(z.imag, z.real))
```

Objetivo

La visualización ayuda a vincular sintaxis, álgebra y geometría. Dibujar z , $\bar{z}$, su módulo y su argumento evita tratar los complejos como símbolos sin interpretación.

Uso del notebook

El notebook incluye diagramas del plano complejo, suma vectorial, conjugación, conversión rectangular-polar, círculo unidad y amplitudes complejas.

Criterio

Cada figura debe responder una pregunta conceptual: dónde está el número, qué operación se aplicó y qué información cambió.



Definición

Un vector en $\mathbb{C}^n$ es una lista ordenada $(z_1, \dots, z_n)$ con $z_i \in \mathbb{C}$. En álgebra lineal se escribe frecuentemente como columna.

Problema que resuelve

Permite modelar sistemas con varios coeficientes complejos. En computación cuántica, esos coeficientes serán amplitudes asociadas a estados base.

Implicación

Un qubit será un vector en $\mathbb{C}^2$; un sistema con más estados base requerirá espacios complejos de mayor dimensión.



Estructura

Un espacio vectorial complejo permite sumar vectores y multiplicarlos por escalares en $\mathbb{C}$. La presencia de escalares complejos amplía la geometría disponible frente a un espacio real.

Papel en el curso

La mecánica cuántica elemental se formula en espacios vectoriales complejos porque los estados se combinan linealmente con amplitudes complejas.

Consecuencia

Las operaciones de norma, producto interno y ortogonalidad deben adaptarse para respetar conjugación compleja.



Norma de un vector complejo

Tipo: Concepto

Definición

La norma euclidiana compleja se define por $\|v\| = \sqrt{\sum_i |v_i|^2}$.

Por qué es necesaria

La norma mide el tamaño total del vector sin depender de cómo se reparten sus componentes reales e imaginarias.

Conexión cuántica

Un estado cuántico puro debe tener norma uno. Esta condición permite interpretar módulos cuadrados como probabilidades que suman uno.



Procedimiento

Si $v \neq 0$, el vector normalizado es $v / \|v\|$.

Problema que resuelve

Muchos vectores contienen información direccional válida pero escala incorrecta. Normalizar conserva la dirección algebraica y ajusta la magnitud a uno.

Interpretación cuántica

Normalizar es el paso que convierte un vector complejo en candidato a estado físico, porque garantiza que las probabilidades totales sumen uno.



Ejemplo: normalización de un vector

Tipo: Ejemplo

Problema

Normalizar $v = (1 + i, 2)^T$.

Desarrollo

Se calcula $\|v\|^2 = |1 + i|^2 + |2|^2 = 2 + 4 = 6$. Por tanto $\|v\| = \sqrt{6}$ y el vector normalizado es $v/\sqrt{6}$.

Interpretación

El vector resultante conserva la proporción entre componentes, pero ahora tiene norma uno y puede usarse como estado normalizado si el contexto físico lo exige.



Definición

Para $u, v \in \mathbb{C}^n$, usamos $\langle u, v \rangle = \sum_i \bar{u}_i v_i$. La conjugación del primer argumento es esencial.

Problema que resuelve

Sin conjugación, la cantidad $\langle v, v \rangle$ podría no ser real ni positiva. Con conjugación, $\langle v, v \rangle = \sum_i |v_i|^2$.

Implicación

El producto interno complejo conecta álgebra lineal con probabilidades: norma, proyección y ortogonalidad dependen de él.



Por qué se conjuga el primer argumento

Tipo: Concepto

Necesidad matemática

La conjugación hace que el producto interno de un vector consigo mismo sea una cantidad real no negativa. Esa propiedad es indispensable para hablar de longitudes.

Lectura física

En mecánica cuántica, las probabilidades se obtienen de módulos cuadrados. El producto interno complejo incorpora exactamente esa estructura.

Consecuencia computacional

En NumPy, `'np.vdot(u,v)'` conjuga el primer argumento. Esta convención coincide con la definición matemática usada aquí.



Definición

Dos vectores complejos u y v son ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$.

Qué problema resuelve

La ortogonalidad distingue estados o direcciones que pueden separarse limpiamente por una medición ideal en una base adecuada.

Implicación cuántica

Los estados base computacionales son ortonormales. Esa propiedad permite asociar probabilidades independientes a los coeficientes de una superposición.



Definición

Una base es un conjunto de vectores linealmente independientes que permite escribir cualquier vector del espacio como combinación lineal única.

Papel conceptual

La base no es solo una lista de vectores. Es un sistema de coordenadas que determina cómo se leen los componentes de un estado.

Conexión cuántica

La base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ será el sistema de coordenadas inicial para describir un qubit.



Definición

Una base es ortonormal si cada vector tiene norma uno y el producto interno entre vectores distintos es cero.

Por qué importa

En una base ortonormal, los coeficientes de un vector normalizado tienen interpretación probabilística directa mediante módulos cuadrados.

Implicación

La estructura de medición en este primer módulo se entiende como lectura de componentes respecto a una base ortonormal determinada.



Ket y bra sin ambigüedad

Tipo: Concepto

Ket

Un estado columna se escribe como $|\psi\rangle$. Si $|\psi\rangle = (\alpha, \beta)^T$, sus entradas son amplitudes complejas.

Bra

El bra asociado se obtiene por conjugado transpuesto: $\langle\psi| = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$.

Razón matemática

La conjugación es necesaria para que $\langle\psi|\psi\rangle$ sea la norma cuadrada del estado.



Ejemplo: de ket a bra

Tipo: Ejemplo

Problema

Dado $|\psi\rangle = -(2 + i)|00\rangle + (1 - i)|01\rangle + \frac{1-i}{3}|11\rangle$, escribir el bra asociado.

Desarrollo

Se conjugan todos los coeficientes y se cambia de columna a fila:

$$\langle\psi| = -(2 - i)\langle 00| + (1 + i)\langle 01| + \frac{1+i}{3}\langle 11|.$$

Interpretación

El bra no es una copia tipográfica del ket. Es la operación algebraica correcta para formar productos internos.



Definición

Una matriz compleja es un arreglo de números en $\mathbb{C}$. Actúa sobre vectores complejos mediante combinaciones lineales de sus componentes.

Papel en el módulo

Los operadores cuánticos elementales se representan mediante matrices complejas. Su acción se estudia multiplicando matriz por vector.

Condición física inicial

No toda matriz compleja representa una evolución ideal. Para preservar norma debe satisfacer una condición de unitariedad.



Definición

La adjunta $A^\dagger$ se obtiene conjugando y transponiendo la matriz A .

Por qué fue necesario introducirla

La transpuesta ordinaria no respeta productos internos complejos. La adjunta sí es compatible con conjugación y norma.

Uso posterior

La unitariedad se define mediante $U^\dagger U = I$. Esta condición será el criterio para reconocer transformaciones que preservan longitud.



Definición

Una matriz U es unitaria si $U^\dagger U = I$.

Qué problema resuelve

En mecánica cuántica ideal, la evolución cerrada debe preservar norma para que las probabilidades sigan sumando uno. La unitariedad expresa exactamente esa preservación.

Interpretación

Una matriz unitaria reorganiza amplitudes sin crear ni destruir probabilidad total.



Cómo reconocer una matriz unitaria

Tipo: Método

Criterio de columnas

Una matriz cuadrada es unitaria si sus columnas forman una base ortonormal compleja.

Criterio matricial

Equivalente a lo anterior, se verifica $U^\dagger U = I$. En cálculo manual suele ser más claro inspeccionar normas y productos internos de columnas.

Uso computacional

En NumPy se evalúa `U.conj().T @ U` y se compara con la identidad usando `np.allclose`.



Ejemplo: matriz diagonal unitaria

Tipo: Ejemplo

Problema

Determinar por qué $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$ es unitaria.

Desarrollo

Cada entrada diagonal tiene módulo uno. Al calcular $U^\dagger U$, los factores conjugados se cancelan: $e^{-i\pi/4} e^{i\pi/4} = 1$.

Interpretación

La matriz preserva la longitud de cualquier vector porque solo multiplica componentes por números de módulo uno.



Ejercicio: matriz no unitaria

Tipo: Ejercicio

Enunciado

Analizar si $A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$ puede ser unitaria.

Desarrollo

La primera columna tiene norma uno y la segunda también. Sin embargo, su producto interno no es cero: aparece un término proporcional a $e^{i\pi/4}/\sqrt{2}$.

Interpretación

La norma de las columnas no basta. También deben ser ortogonales. La unitariedad exige preservar toda la geometría del producto interno, no solo longitudes individuales.



Hadamard como matriz que preserva longitud

Tipo: Concepto

Definición

El operador Hadamard es $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Propiedad relevante

Sus columnas son ortonormales, por lo que $H^\dagger H = I$. En consecuencia, aplicar H no cambia la norma del vector.

Interpretación

Hadamard redistribuye amplitudes entre componentes de una manera compatible con probabilidades. En este primer módulo lo tratamos como ejemplo central de matriz unitaria real.



Sentido físico de la evolución unitaria

Tipo: Concepto

Problema físico

Un estado normalizado representa una distribución total de probabilidad igual a uno. Una evolución aceptable no debe convertirlo en un vector con norma diferente.

Respuesta matemática

Las matrices unitarias preservan la norma y, por tanto, la suma de probabilidades. Esta es la razón por la que ocupan un lugar central en circuitos cuánticos ideales.

Implicación computacional

Cuando se programa un operador cuántico, verificar unitariedad no es un detalle técnico: es comprobar que la transformación puede representar una evolución ideal.



Definición formal de qubit

Tipo: Concepto

Definición física

Un qubit es un sistema cuántico con dos estados distinguibles de referencia. Matemáticamente, un estado puro de qubit se representa por un vector normalizado en $\mathbb{C}^2$.

Qué problema resuelve

El qubit proporciona el análogo cuántico mínimo de una unidad de información binaria, pero su estado no se limita a dos valores clásicos.

Implicación

La información relevante se codifica en amplitudes complejas asociadas a una base de dos estados.



Definición

La base computacional se escribe como $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Papel conceptual

Estos estados funcionan como ejes de coordenadas para describir cualquier estado de un qubit en este módulo.

Implicación

La medición en esta base se interpreta observando qué componente del vector se selecciona probabilísticamente.



Definición

Un estado general de qubit se escribe $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$.

Qué problema resuelve

La superposición permite describir estados que no son simplemente $|0\rangle$ ni $|1\rangle$, sino combinaciones lineales normalizadas.

Interpretación

Los coeficientes no son probabilidades directas. Son amplitudes complejas de las que se obtienen probabilidades mediante módulos cuadrados.



Idea central

Una amplitud compleja contiene magnitud y orientación en el plano complejo. La magnitud contribuye a probabilidades; la orientación será relevante para cómo las transformaciones lineales combinan componentes.

Por qué son necesarias

Usar solo probabilidades reales no basta para describir transformaciones unitarias generales ni combinaciones lineales que ocurren antes de medir.

Implicación

El lenguaje complejo permite que los estados evolucionen linealmente y que las probabilidades aparezcan solo al aplicar la regla de medición.



Regla de Born

Tipo: Concepto

Enunciado

Si $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, entonces $\Pr(0) = |\alpha|^2$ y $\Pr(1) = |\beta|^2$.

Problema que resuelve

La regla de Born traduce amplitudes complejas, que no son observables directos, en probabilidades de resultados de medición.

Consecuencia

La normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ asegura que la medición produzca una distribución probabilística válida.



Ejemplo: probabilidad de observar $|0\rangle$

Tipo: Ejemplo

Problema

Para $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} (2-i)/3 \\ (\sqrt{3}+i)/3 \end{pmatrix}$, calcular la probabilidad de observar $|0\rangle$.

Desarrollo

La amplitud de $|0\rangle$ es $(2-i)/3$. Su módulo cuadrado es $|(2-i)/3|^2 = (2^2 + (-1)^2)/9 = 5/9$.

Interpretación

La parte imaginaria no se ignora. Entra al cálculo a través del módulo cuadrado, igual que la parte real.



Relación

La amplitud asociada a proyectar $|\psi\rangle$ sobre un estado base $|\phi\rangle$ se escribe $\langle\phi|\psi\rangle$.

Por qué importa

Esta fórmula une producto interno complejo y medición. La probabilidad se obtiene como $|\langle\phi|\psi\rangle|^2$.

Interpretación

El producto interno selecciona el componente compatible con el estado observado; el módulo cuadrado traduce esa amplitud en probabilidad.



Ejemplo: probabilidad de un estado base

Tipo: Ejemplo

Problema

Sea $|\psi\rangle = -\frac{2i}{\sqrt{6}}|01\rangle + \frac{1-i}{\sqrt{6}}|11\rangle$. Calcular $|\langle 11|\psi\rangle|^2$.

Desarrollo

El coeficiente de $|11\rangle$ es $(1-i)/\sqrt{6}$. Su módulo cuadrado es $(1^2 + (-1)^2)/6 = 2/6 = 1/3$.

Interpretación

El cálculo muestra que la probabilidad asociada a un estado base depende únicamente del módulo cuadrado de su amplitud correspondiente.



Condición

Un vector puede representar un estado cuántico puro solo si su norma es uno. En coordenadas, la suma de módulos cuadrados de sus amplitudes debe ser 1.

Por qué fue necesaria

Sin normalización, la regla de Born no produce una distribución de probabilidad total igual a uno.

Implicación

La normalización no es una convención estética. Es la condición que permite interpretar el vector como estado físico.



Ejercicio: completar una amplitud

Tipo: Ejercicio

Enunciado

Si $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}$ es un estado válido, determinar qué condición debe satisfacer a .

Desarrollo

El segundo componente tiene módulo cuadrado $|(1-i)/2|^2 = (1+1)/4 = 1/2$. Por normalización debe cumplirse $|a|^2 = 1/2$.

Interpretación

No hay un único valor posible para a . Cualquier complejo sobre el círculo de radio $1/\sqrt{2}$ satisface la condición de norma.



Procedimiento

En este módulo, medir un qubit en la base computacional significa obtener 0 con probabilidad $|\alpha|^2$ o 1 con probabilidad $|\beta|^2$.

Qué significa el resultado

El resultado de medición es clásico y discreto. El vector complejo se usa para calcular probabilidades antes de medir.

Implicación pedagógica

El estudiante debe distinguir entre amplitud, que es un número complejo, y resultado observado, que es un evento discreto.



Sistemas de dos qubits: base mínima

Tipo: Concepto

Base computacional

Para dos qubits, la base computacional contiene $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ y $|11\rangle$.

Papel en ejemplos

Los estados de dos qubits permiten practicar amplitudes asociadas a cadenas binarias y probabilidades de resultados específicos.

Limitación deliberada

En este primer módulo solo se usa esta base para organizar coeficientes y mediciones. Representaciones geométricas avanzadas se reservan para después.



Idea operacional

Una compuerta controlada aplica una operación sobre un objetivo solo cuando los controles cumplen una condición binaria.

CCNOT

La compuerta de doble control aplica un cambio sobre el tercer qubit cuando los dos primeros están en 1. En código de Qiskit suele escribirse `'ccx(0,1,2)'`.

Por qué aparece aquí

Este concepto conecta el lenguaje de estados base con operaciones reversibles elementales sin introducir todavía familias de operadores más avanzadas.



Definición

El operador $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ intercambia las componentes de un qubit.

Acción en la base

Satisface $X|0\rangle = |1\rangle$ y $X|1\rangle = |0\rangle$.

Interpretación

Es el análogo cuántico elemental de invertir una etiqueta binaria en la base computacional.



Definición

El operador $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ conserva la primera componente y cambia el signo de la segunda.

Acción en la base

Satisface $Z |0\rangle = |0\rangle$ y $Z |1\rangle = -|1\rangle$.

Interpretación

En este módulo se presenta como una matriz unitaria que modifica amplitudes de manera controlada por la etiqueta base.



Definición

El operador $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ combina intercambio de componentes con factores imaginarios.

Acción sobre componentes

Para $(\alpha, \beta)^T$, se obtiene $Y(\alpha, \beta)^T = (-i\beta, i\alpha)^T$.

Papel conceptual

Este operador muestra por qué los coeficientes complejos no son opcionales: algunos operadores elementales los usan de forma explícita.



Ejemplo: aplicar Pauli Y

Tipo: Ejemplo

Problema

Aplicar Y al estado $\begin{pmatrix} i/\sqrt{6} \\ (2+i)/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Desarrollo

Usando $Y(\alpha, \beta)^T = (-i\beta, i\alpha)^T$, el primer componente es $-i(2+i)/\sqrt{6} = (1-2i)/\sqrt{6}$ y el segundo es $i(i/\sqrt{6}) = -1/\sqrt{6}$.

Interpretación

El resultado confirma que la matriz transforma amplitudes complejas preservando el marco vectorial del qubit.



Operador Hadamard

Tipo: Concepto

Definición

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Acción básica

$$H|0\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} \text{ y } H|1\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}.$$

Interpretación

Hadamard redistribuye amplitudes entre los dos estados base sin cambiar la norma total.



Ejemplo: Hadamard sobre $|0\rangle$

Tipo: Ejemplo

Problema

Calcular $H|0\rangle$.

Desarrollo

Multiplicar H por $(1, 0)^T$ selecciona la primera columna de H : $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^T$.

Interpretación

El resultado tiene dos amplitudes iguales y norma uno. Por Born, medir en la base computacional produce 0 o 1 con la misma probabilidad.



Relación esencial

Si U es unitaria, entonces $\|U\psi\| = \|\psi\|$.

Por qué importa

La evolución ideal no debe alterar la probabilidad total. Las unitarias permiten transformar estados sin abandonar el conjunto de vectores normalizados.

Lectura computacional

Verificar unitariedad es verificar que una matriz puede actuar como operador cuántico ideal en este nivel del curso.



Ejercicio: reconocer unitariedad

Tipo: Ejercicio

Enunciado

Determinar si $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ es unitaria.

Desarrollo

Cada columna tiene norma uno: $1/2 + 1/2 = 1$. El producto interno entre columnas es $(1)(-i)/2 + (1)(i)/2 = 0$.

Interpretación

Las columnas son ortonormales, por lo que U preserva normas y puede interpretarse como operador unitario.



Contenido cubierto

El módulo cubre números complejos, plano complejo, conjugación, módulo, argumento, formas rectangular y polar, exponencial compleja, vectores complejos, producto interno, qubits, medición y operadores elementales.

Contenido reservado

Herramientas geométricas avanzadas de representación de qubits y familias especializadas de transformaciones se dejan para módulos posteriores.

Razón pedagógica

Separar fundamentos de extensiones evita que la notación oculte la estructura básica de amplitudes, normalización y unitariedad.



Representación

NumPy permite construir vectores complejos usando literales con 'j' y 'dtype=complex'.

Producto interno

'np.vdot(u,v)' conjuga el primer argumento, por lo que implementa el producto interno complejo en la convención usada aquí.

Uso práctico

Esto permite calcular normas, verificar normalización y comparar resultados algebraicos con código.

```
import numpy as np
v = np.array([1+1j, 2], dtype=complex)
print(np.vdot(v, v))
print(np.sqrt(np.vdot(v, v).real))
```

Conjugado transpuesto en NumPy

Tipo: Método

Operación

La adjunta de una matriz compleja se implementa como 'A.conj().T'.

Por qué importa

La adjunta permite verificar unitariedad y construir bras a partir de kets.

Criterio numérico

Como los cálculos usan punto flotante, se compara con tolerancia mediante 'np.allclose'.

```
U = np.array([[1, 0], [0, 1j]], dtype=complex)
print(U.conj().T @ U)
print(np.allclose(U.conj().T @ U, np.eye(2)))
```

Función de probabilidades en Python

Tipo: Método

Objetivo

Dada una lista de amplitudes complejas, se calculan probabilidades tomando módulos cuadrados.

Implementación

La expresión `'np.abs(psi)**2'` calcula el módulo cuadrado componente por componente.

Interpretación

El resultado es una distribución de probabilidad si la suma es uno dentro de tolerancia numérica.

```
psi = np.array([(2-1j)/3, (np.sqrt(3)+1j)/3])
probs = np.abs(psi)**2
print(probs)
print(probs.sum())
```


Motivación

Dibujar amplitudes como puntos o vectores en el plano complejo ayuda a separar tres objetos: el coeficiente complejo, su módulo y la probabilidad derivada.

Uso del gráfico

El notebook muestra amplitudes del vector de estado en el plano y, en una gráfica separada, sus probabilidades.

Valor pedagógico

La visualización evita confundir la amplitud con su probabilidad y refuerza el papel del módulo cuadrado.



Ejercicio Python: probabilidad de $|0\rangle$

Tipo: Ejercicio

Enunciado

Usar NumPy para calcular la probabilidad de observar $|0\rangle$ en $\text{'psi'} = [(2-1j)/3, (\text{sqrt}(3)+1j)/3]$.

Desarrollo

Se evalúa 'abs(psi[0])**2' , que implementa el módulo cuadrado de la primera amplitud.

Interpretación

El resultado $5/9$ coincide con el cálculo manual y confirma que ambas partes del número complejo contribuyen a la probabilidad.

```
psi = np.array([(2-1j)/3, (np.sqrt(3)+1j)/3], dtype=complex)
print(abs(psi[0])**2)
```

Ejercicio Python: verificar normalización

Tipo: Ejercicio

Enunciado

Comprobar si el vector 'psi' está normalizado.

Desarrollo

Se calcula '`np.vdot(psi, psi)`'. Si el resultado es cercano a 1, la suma de módulos cuadrados es uno.

Interpretación

La validación computacional refuerza que la normalización es una propiedad algebraica verificable, no una suposición informal.

```
print(np.vdot(psi, psi))  
print(np.allclose(np.vdot(psi, psi), 1))
```



Criterio académico

Cada instrucción de Python debe asociarse con una operación matemática: 'conjugate' con conjugación, 'abs' con módulo, 'vdot' con producto interno y 'conj().T' con adjunta.

Problema que resuelve

Esta asociación evita aprender programación como una colección de recetas. El código se convierte en laboratorio para verificar estructura matemática.

Implicación

Cuando aparezcan circuitos y simuladores más adelante, la lectura matemática del código será tan importante como la sintaxis.



Sintaxis compleja

Usar 'i' en lugar de 'j' en Python no crea una unidad imaginaria; crea una referencia a una variable no definida.

Probabilidades

Confundir amplitud con probabilidad produce errores. La probabilidad siempre usa módulo cuadrado de la amplitud correspondiente.

Álgebra lineal compleja

Usar transpuesta sin conjugación en espacios complejos rompe la definición correcta de producto interno y puede dar normas incorrectas.



Si una probabilidad excede uno

El vector probablemente no está normalizado o se calculó una cantidad distinta del módulo cuadrado.

Si una matriz no preserva norma

Debe revisarse la condición $U^\dagger U = I$. Pequeñas diferencias numéricas pueden tolerarse, pero errores estructurales no.

Si el código no reconoce un complejo

Conviene revisar sintaxis de Python: 'j' representa la unidad imaginaria y los métodos complejos pertenecen al objeto creado.



Cadena lógica

Los complejos describen el plano; los vectores complejos organizan amplitudes; el producto interno permite norma y proyección; la regla de Born convierte amplitudes en probabilidades; las unitarias preservan la estructura probabilística.

Valor universitario

El módulo no enseña únicamente operaciones. Construye el vocabulario matemático que permite formular estados y transformaciones cuánticas con precisión.



Complejos

Convertir $-2 - 2i$ a forma polar principal y explicar el cuadrante. Calcular además su conjugado y verificar que $z\bar{z} = |z|^2$.

Álgebra lineal

Normalizar $(1 - i, \sqrt{2})^T$ y verificar con producto interno complejo que la norma final es uno.

Cuántica y Python

Construir en NumPy un estado normalizado, calcular probabilidades de medición y verificar si una matriz dada preserva la norma.



Idea central

Los números complejos extienden la aritmética real para describir magnitud y dirección en el plano. El álgebra lineal compleja convierte esos números en coordenadas de estados y en matrices de transformación.

Resultado del módulo

El estudiante queda preparado para manipular amplitudes complejas, calcular probabilidades, reconocer transformaciones unitarias elementales y usar Python como herramienta de verificación matemática.



Continuidad

Con forma polar, exponencial compleja, producto interno, normalización, qubits y matrices unitarias ya establecidos, los módulos posteriores pueden introducir herramientas más especializadas sin reconstruir la base.

Mensaje académico

La computación cuántica comienza con una elección matemática precisa: representar estados mediante vectores complejos normalizados y transformaciones ideales mediante matrices unitarias.

