

Números Complejos II

Geometría del qubit, fases cuánticas
y compuertas de fase

Fundamentos para visualización y control de estados de qubits



Punto de partida

Partimos de los números complejos, la normalización y el qubit como sistema de dos niveles ya trabajados. Ahora el foco cambia: no se trata de definir nuevamente el qubit, sino de entender por qué un mismo vector algebraico admite una lectura geométrica y cómo esa lectura permite interpretar compuertas de fase y rotaciones.

Estructura

El desarrollo avanza desde la parametrización de un estado puro de un qubit hacia la esfera de Bloch, luego distingue fase global y fase relativa, introduce operadores como transformaciones geométricas y cierra con visualización computacional en Python y Qiskit.



Competencias matemáticas

El estudiante debe convertir entre amplitudes complejas y coordenadas geométricas, reconocer cuándo dos vectores representan el mismo estado físico y explicar cómo las probabilidades de medición se relacionan con la posición del estado en la esfera.

Competencias computacionales

El estudiante debe construir estados y compuertas en Qiskit, visualizar estados de un qubit en la esfera de Bloch, interpretar el efecto de Pauli, Hadamard, S, T y CRZ, y verificar por simulación que la geometría concuerda con las amplitudes.



Continuidad con el módulo anterior

Se asume que ya se domina la forma rectangular y polar de un número complejo, la conjugación, el módulo, la normalización de vectores complejos, la regla de Born y la definición formal de qubit. Esos elementos no se repiten desde cero; se usan como lenguaje operativo.

Motivación

La pregunta de fondo es cómo pasar de un vector complejo abstracto a una imagen geométrica útil. La respuesta será la esfera de Bloch, una representación que condensa probabilidades y fases relativas en un punto tridimensional.



Problema que resuelve

Un estado de qubit se escribe con dos amplitudes complejas. Esa descripción es exacta, pero no siempre permite ver de inmediato qué cambia cuando se aplica una compuerta. La representación geométrica organiza esa información y hace visible la acción de operadores como rotaciones.

Implicación para computación cuántica

El diseño de circuitos de un qubit se vuelve más transparente cuando se interpreta una compuerta como movimiento sobre una esfera. Esto permite anticipar mediciones, diagnosticar errores de fase y comprender por qué algunas operaciones alteran probabilidades solo después de cambiar de base.



Estado algebraico

Un estado puro de un qubit se escribe como $\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, con amplitudes complejas y condición $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. La normalización no es un requisito estético: es la condición que convierte módulos cuadrados en probabilidades.

Lectura conceptual

El par (α, β) contiene más información que una distribución clásica sobre dos resultados. Además de las probabilidades $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$, contiene una relación de fase que puede modificar el comportamiento bajo futuras compuertas.



Conteo de parámetros

Dos amplitudes complejas contienen cuatro números reales. La normalización elimina un grado de libertad, y la equivalencia bajo fase global elimina otro. Por eso un estado puro de un qubit puede representarse mediante dos parámetros geométricos.

Consecuencia

La esfera de Bloch no es una analogía informal. Surge de una reducción precisa: el estado físico de un qubit puro se describe por una latitud y una longitud, que codifican el balance de probabilidades y la fase relativa.



Forma estándar

Todo estado puro de un qubit puede escribirse, salvo una fase global, como

Interpretación

El ángulo θ controla la distribución de probabilidad entre los resultados 0 y 1. El ángulo ϕ controla la fase relativa entre las amplitudes, y por tanto modifica cómo el estado interferirá después de aplicar compuertas que mezclan la base computacional.

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \phi < 2\pi.$$



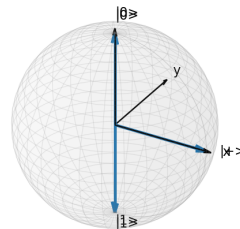
De amplitudes a geometría

La forma anterior se traduce en un punto de la esfera unitaria con coordenadas $x = \sin \theta \cos \phi$, $y = \sin \theta \sin \phi$ y $z = \cos \theta$. La coordenada vertical codifica el sesgo de medición; la coordenada azimutal codifica fase relativa.

Significado físico

Estados cerca del polo norte tienen alta probabilidad de medir 0; estados cerca del polo sur tienen alta probabilidad de medir 1. Los estados del ecuador tienen probabilidades iguales, pero pueden diferir radicalmente por su fase relativa.

Estados base y superposición

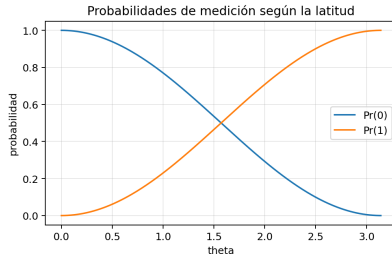


Relación con la regla de Born

En la parametrización esférica, $\text{Pr}(0) = \cos^2(\theta/2)$ y $\text{Pr}(1) = \sin^2(\theta/2)$. La longitud ϕ no cambia estas probabilidades si se mide directamente en la base computacional.

Papel de la fase

Que ϕ no aparezca en la medición directa no significa que sea irrelevante. Su efecto se manifiesta cuando una compuerta posterior transforma la fase en diferencia de amplitud medible.



Latitud

La latitud determina cuánto peso probabilístico tiene cada estado base. En la esfera, moverse de norte a sur equivale a transferir probabilidad desde $|0\rangle$ hacia $|1\rangle$.

Longitud

La longitud determina cómo se compara la fase de la amplitud de $|1\rangle$ con la de $|0\rangle$. Esta variable no siempre aparece en una medición inmediata, pero determina el resultado de interferencias posteriores.



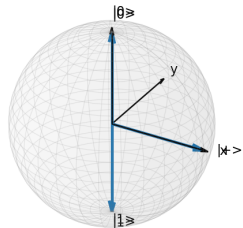
Problema

Identificar cómo se ubican los estados más usados en la representación geométrica.

Interpretación

Los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$ son polos. Las superposiciones balanceadas ocupan el ecuador. Por tanto, dos estados con la misma probabilidad de medir 0 pueden estar en puntos distintos si su fase relativa cambia.

Estados base y superposición



Problema

Analizar $\frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$ desde la esfera.

Idea cuántica ilustrada

Ambas probabilidades son $1/2$, pero el signo negativo desplaza el estado al lado opuesto del ecuador respecto a $|+\rangle$. La diferencia no se observa si solo se mide en la base computacional, pero sí al aplicar Hadamard.

Conclusión

La geometría separa dos preguntas: qué probabilidad tiene cada resultado y con qué fase relativa interferirá el estado después.

Enunciado

Considere $|\psi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} |0\rangle - \frac{i}{2} |1\rangle$. Determine una parametrización θ, ϕ compatible.

Desarrollo

La amplitud de $|0\rangle$ es real positiva, así que $\cos(\theta/2) = \sqrt{3}/2$ y $\theta = \pi/3$. La amplitud de $|1\rangle$ tiene módulo $1/2$ y fase $-\pi/2$, equivalente a $3\pi/2$.

Interpretación

El estado está cerca del polo norte, porque medir 0 tiene probabilidad $3/4$. Su longitud está en dirección negativa del eje y , porque la fase relativa es $-\pi/2$.



Enunciado

Considere $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + i \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle$.

Desarrollo

Los módulos de las amplitudes son iguales, por lo que $\theta = \pi/2$. La amplitud de $|1\rangle$ tiene fase $\phi = \pi/2$ respecto de la de $|0\rangle$.

Interpretación

El estado está sobre el ecuador y apunta hacia el eje $+y$. La probabilidad de medir 0 es $1/2$, pero su fase relativa no coincide con la de $|+\rangle$.



Problema que resuelve

Dos vectores pueden diferir algebraicamente y aun representar el mismo estado físico. La fase global formaliza esta redundancia: $|\psi\rangle$ y $e^{i\gamma} |\psi\rangle$ producen las mismas probabilidades en toda medición.

Importancia

Sin esta identificación, el espacio de estados tendría parámetros que no corresponden a ningún resultado observable. La esfera de Bloch elimina esa redundancia y representa estados físicos, no cada vector algebraico posible.



Problema

Comparar un estado con $i|\psi\rangle$.

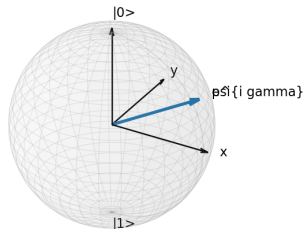
Idea cuántica ilustrada

Multiplicar todas las amplitudes por el mismo factor complejo rota simultáneamente sus fases, pero no altera relaciones internas. La posición en la esfera permanece igual porque las probabilidades y la fase relativa se conservan.

Conclusión

Una diferencia algebraica no siempre implica una diferencia física. La equivalencia bajo fase global es indispensable para interpretar correctamente estados y salidas de simuladores,

Fase global: mismo punto físico



Problema que resuelve

La fase relativa distingue estados con las mismas probabilidades inmediatas. Si $|0\rangle$ y $|1\rangle$ tienen amplitudes de igual módulo, la diferencia física queda en cómo esas amplitudes se combinan bajo una compuerta posterior.

Papel dentro del algoritmo cuántico

La interferencia cuántica depende de la fase relativa. Por eso muchas compuertas no cambian directamente las probabilidades de la base computacional, pero preparan estados que se comportan de forma distinta después de Hadamard u otras transformaciones.



Problema

Comparar tres estados ecuatoriales con fases 0 , $\pi/2$ y π .

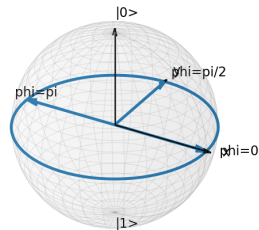
Idea cuántica ilustrada

Todos tienen $\Pr(0) = \Pr(1) = 1/2$. Sin embargo, ocupan posiciones distintas en el ecuador. La esfera muestra que la fase relativa es una coordenada física del estado, no una decoración algebraica.

Conclusión

La fase relativa no se ve en una medición directa de Z , pero define cómo se transformará el estado bajo operaciones posteriores.

Fase relativa: movimiento sobre el ecuador

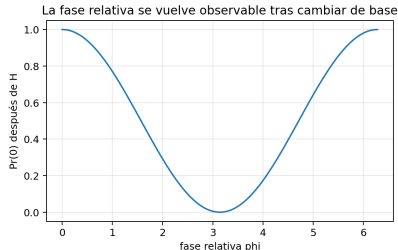


Problema que resuelve

La fase relativa no es directamente una frecuencia de resultados en la base computacional. Para observarla, se debe cambiar la base de medición o aplicar una compuerta que mezcle amplitudes.

Interpretación física

Una compuerta como Hadamard suma y resta amplitudes. Si las fases hacen que dos contribuciones lleguen con el mismo signo, se refuerzan; si llegan con signos opuestos, se cancelan. La interferencia convierte fase en probabilidad.



Enunciado

Compare $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$.

Desarrollo

Ambos estados dan $\Pr(0) = \Pr(1) = 1/2$ si se miden inmediatamente. Después de aplicar Hadamard, el primero se transforma en $|0\rangle$ y el segundo en $|1\rangle$.

Interpretación

La fase relativa no cambia la estadística de una medición directa en la base computacional, pero cambia la respuesta del estado ante una operación que produce interferencia.



Construcción

La esfera de Bloch representa estados puros de un qubit mediante vectores reales unitarios $\vec{r} = (x, y, z)$. A cada estado normalizado se le asocia un punto de la esfera después de eliminar la fase global.

Valor conceptual

Esta representación traduce el álgebra compleja en una geometría operativa: las compuertas unitarias de un qubit actúan como rotaciones del vector de Bloch, y la medición en la base computacional se lee desde la coordenada z .



Fórmulas útiles

Para $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$, el vector de Bloch se calcula como

Lectura

La coordenada z mide el desbalance de probabilidades. Las coordenadas x e y contienen la información de coherencia entre las dos amplitudes, que es precisamente donde vive la fase relativa.

$$x = 2 \operatorname{Re}(\alpha^* \beta), \quad y = 2 \operatorname{Im}(\alpha^* \beta), \quad z = |\alpha|^2 - |\beta|^2.$$

Reconstrucción

Un punto de la esfera con coordenadas esféricas (θ, ϕ) se traduce en el estado $\cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle$. La reconstrucción es única una vez fijada la convención de fase global.

Interpretación

La geometría no elimina la información cuántica relevante; la reorganiza. La latitud recupera módulos, la longitud recupera fase relativa.



Alcance

La esfera de Bloch describe estados puros de un qubit. Es una herramienta extremadamente útil para operadores de un qubit, pero no sustituye el formalismo vectorial general cuando aparecen registros de varios qubits o correlaciones no separables.

Decisión pedagógica

En este módulo se usa la esfera para consolidar intuición geométrica y operaciones básicas. Circuitos de múltiples qubits complejos y estados entrelazados se reservan para módulos posteriores.



Problema que resuelve

En álgebra lineal, una matriz unitaria preserva norma. En física cuántica, esa propiedad garantiza que las probabilidades totales permanezcan normalizadas durante la evolución.

Lectura geométrica

Para un qubit puro, una unitaria cambia la posición del punto sobre la esfera sin sacarlo de la superficie. Muchas compuertas elementales se interpretan como rotaciones alrededor de ejes específicos.



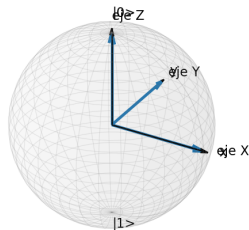
Motivación

Las matrices de Pauli son los operadores elementales que organizan la geometría del qubit. Funcionan como generadores de transformaciones alrededor de los ejes x , y y z .

Papel computacional

Además de ser compuertas de circuito, Pauli permite describir mediciones, errores, rotaciones y observables. En este módulo se usan como puente entre matrices complejas y movimientos de la esfera.

Pauli como rotaciones de π alrededor de ejes



Acción algebraica

La compuerta X intercambia los estados base: $X|0\rangle = |1\rangle$ y $X|1\rangle = |0\rangle$.

Interpretación geométrica

En la esfera, X es una rotación de ángulo π alrededor del eje x . Por eso invierte el polo norte y el polo sur, mientras mantiene fija la dirección del eje x .

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Enunciado

Sea $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$. Determine $X |\psi\rangle$ e interprete el resultado.

Desarrollo

Por linealidad, $X |\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle = \beta |0\rangle + \alpha |1\rangle$.

Interpretación

La compuerta intercambia las amplitudes asociadas a los polos. En términos de medición, intercambia las probabilidades de observar 0 y 1.



Acción algebraica

La compuerta Y también intercambia los estados base, pero introduce factores imaginarios: $Y|0\rangle = i|1\rangle$ y $Y|1\rangle = -i|0\rangle$.

Interpretación geométrica

En la esfera, Y es una rotación de ángulo π alrededor del eje y . Los factores i no son detalles accidentales; permiten que la transformación sea unitaria y corresponda a la orientación correcta de la rotación.

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Enunciado

Aplique Y al estado $\begin{pmatrix} i/\sqrt{6} \\ (2+i)/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Desarrollo

Multiplicar por Y da $\begin{pmatrix} -i(2+i)/\sqrt{6} \\ i(i)/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-2i)/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

Interpretación

La operación mezcla intercambio de amplitudes y fase. Esta es la razón por la que Y no puede entenderse como un simple cambio clásico de etiquetas.

Acción algebraica

La compuerta Z deja fijo $|0\rangle$ y cambia el signo de $|1\rangle$: $Z(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$.

Interpretación geométrica

En la esfera, Z es una rotación de ángulo π alrededor del eje z . No cambia las probabilidades de medir 0 o 1, pero sí cambia la fase relativa.

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Enunciado

Considere $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Calcule $Z|+\rangle$.

Desarrollo

La amplitud de $|0\rangle$ permanece igual y la amplitud de $|1\rangle$ cambia de signo. Por tanto, $Z|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle$.

Interpretación

La probabilidad de medir 0 sigue siendo $1/2$, pero el punto ecuatorial se desplaza al lado opuesto. La operación es puramente de fase en la base computacional.



Resultado geométrico

Las tres compuertas Pauli corresponden a rotaciones de π alrededor de sus respectivos ejes en la esfera de Bloch. Esta interpretación explica por qué todas son involutivas: aplicarlas dos veces devuelve el estado inicial, salvo la representación algebraica de fases compatibles.

Implicación

La geometría convierte una tabla de matrices en una imagen dinámica: cada Pauli invierte los componentes perpendiculares a su eje y preserva la componente paralela.



X

Intercambia norte y sur, y conserva el eje x . Es la operación más cercana a una negación clásica del bit, aunque sobre superposiciones también actúa sobre coherencias.

Y

Intercambia los polos con factores imaginarios y conserva el eje y . Su presencia muestra que la aritmética compleja es estructural, no opcional.

Z

No cambia los polos, pero invierte el ecuador respecto al eje z . Es una operación de fase que se vuelve observable al cambiar de base.



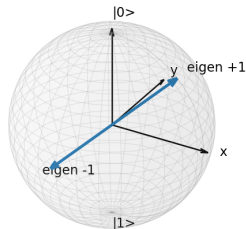
Papel conceptual

Hadamard no solo crea superposiciones; cambia entre descripciones donde la información se encuentra en poblaciones y descripciones donde la información se encuentra en coherencias.

Geometría

En la esfera de Bloch, Hadamard corresponde a una rotación de π alrededor del eje proporcional a $(1, 0, 1)$. Por eso intercambia el eje z con el eje x: $|0\rangle$ se envía a $|+\rangle$ y $|1\rangle$ a $|-\rangle$.

Eje geométrico de Hadamard



Estados invariantes

Los estados alineados con el eje de Hadamard son eigenestados. Uno no cambia bajo H y el otro cambia por un signo. En la representación física, la dirección asociada al eigenvalor $+1$ permanece fija.

Importancia

Identificar estados invariantes permite razonar sobre circuitos sin multiplicar matrices en cada paso. La geometría muestra qué direcciones son preservadas por una transformación.



Enunciado

Encuentre un estado no nulo que no cambie al aplicar Hadamard.

Desarrollo

Resolver $H|\psi\rangle = |\psi\rangle$ equivale a buscar el eigenvector de eigenvalor $+1$. Una forma proporcional es $(\cos(\pi/8), \sin(\pi/8))^T$.

Interpretación

El estado apunta en el eje de rotación de Hadamard. Como está alineado con ese eje, la rotación de π no altera su dirección física.



Problema que resuelve

Una compuerta puede cambiar el estado sin cambiar inmediatamente las probabilidades en la base computacional. Esto ocurre con operaciones diagonales como Z , S o T .

Lectura correcta

Para evaluar el efecto físico de una compuerta, no basta mirar una sola medición. Se debe preguntar si la operación cambia la posición en la esfera y cómo ese cambio afecta mediciones posteriores en otras bases.



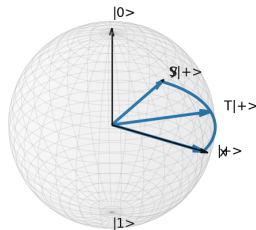
Problema que resuelven

Las compuertas de fase modifican la fase relativa entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$ sin cambiar directamente sus módulos. Son esenciales para controlar interferencias.

Papel dentro de circuitos

Aunque no alteren la estadística de una medición inmediata en la base computacional, preparan diferencias que Hadamard u otras compuertas pueden convertir en probabilidades.

Compuertas de fase: avances alrededor de z



Definición

La compuerta S aplica una fase i a la componente $|1\rangle$: $S(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha|0\rangle + i\beta|1\rangle$.

Geometría

Sobre la esfera, S corresponde a una rotación de $\pi/2$ alrededor del eje z . Mueve estados ecuatoriales por un cuarto de vuelta y deja fijos los polos.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$



Definición

La compuerta $S^\dagger$ aplica la fase inversa $-i$ a la componente $|1\rangle$. Es la inversa de S y satisface $S^\dagger S = I$.

Interpretación

Geométricamente deshace la rotación de S . En circuitos, las compuertas inversas son necesarias para controlar fases sin acumular desplazamientos no deseados.

$$S^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$



Definición

La compuerta T aplica una fase $e^{i\pi/4}$ a $|1\rangle$. Su acción es más fina que la de S , porque corresponde a media rotación de S alrededor del eje z .

Interpretación computacional

La compuerta T es fundamental porque permite construir familias de circuitos más expresivos. En este módulo se interpreta únicamente como una rotación de fase de un qubit.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$



Definición

La compuerta $T^\dagger$ aplica $e^{-i\pi/4}$ a la componente $|1\rangle$. Es la operación inversa de T .

Significado geométrico

En la esfera, $T^\dagger$ retrocede un octavo de vuelta alrededor de z . Esta inversión permite construir y deshacer ajustes finos de fase.

$$T^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$$



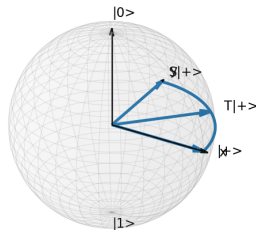
Comparación

Las compuertas diagonales no cambian las probabilidades de la base computacional porque no modifican los módulos de α y β . Su efecto es desplazar la longitud de Bloch.

Interpretación

S avanza $\pi/2$ y T avanza $\pi/4$ sobre el ecuador cuando se parte de una superposición balanceada. Por eso son herramientas naturales para estudiar fase relativa.

Compuertas de fase: avances alrededor de z



Enunciado

Partiendo de $|0\rangle$, compare la probabilidad de medir 0 después de aplicar S y después de aplicar T .

Desarrollo

Como $|0\rangle$ es eigenestado de ambas compuertas con eigenvalor 1, se mantiene como $|0\rangle$. La probabilidad de medir 0 es 1 en ambos casos.

Interpretación

Las compuertas de fase tienen efecto observable sobre superposiciones, no sobre un estado que está exactamente en el polo norte.



Motivación

Las secuencias como HSH o $HT^\dagger H$ muestran que una operación diagonal puede convertirse, al cambiar de base, en una transformación que altera probabilidades de medición.

Papel de Hadamard

Hadamard gira el marco de referencia: una fase aplicada alrededor de z puede reinterpretarse como una rotación alrededor de otro eje cuando se rodea por cambios de base.



Enunciado

Determine conceptualmente por qué una secuencia X , luego H , luego S puede producir un estado con amplitudes iguales y fase relativa negativa imaginaria.

Desarrollo

Primero X lleva $|0\rangle$ a $|1\rangle$. Luego H produce $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$. Finalmente S multiplica la componente $|1\rangle$ por i , obteniendo $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$.

Interpretación

La secuencia combina inversión, creación de superposición y ajuste de fase. El resultado no se entiende como tres instrucciones aisladas, sino como una trayectoria sobre la esfera.

Definición

Una rotación alrededor de z cambia la fase relativa entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$ sin cambiar la coordenada vertical. En la esfera, esto significa moverse por un círculo de latitud constante.

Relación con compuertas de fase

S y T son casos discretos de esta familia. Entenderlas como rotaciones permite conectar matrices diagonales, exponenciales complejas y visualización geométrica.

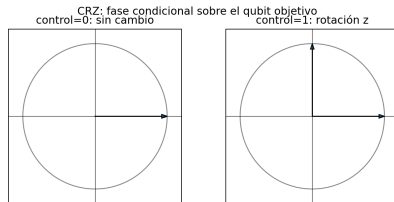


Problema que resuelve

CRZ aplica una rotación alrededor de z sobre un qubit objetivo solo cuando un qubit de control está en el estado que activa la operación. Es la versión condicional de una rotación de fase.

Interpretación

La idea central no es todavía estudiar circuitos grandes, sino comprender que una fase puede depender del estado de otro qubit. Esta dependencia condicional será fundamental en módulos posteriores, pero aquí se mantiene como una operación elemental controlada.



Forma operativa

En la base computacional de dos qubits, CRZ deja inalteradas las componentes con control no activado y aplica una rotación de fase al subespacio del objetivo condicionado.

Lectura computacional

El circuito no mide el control. La condición se implementa coherentemente: si el control está en superposición, la operación preserva la linealidad de la evolución cuántica.

$$CRZ(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-i\lambda/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\lambda/2} \end{pmatrix}$$

Código mínimo

En Qiskit, una rotación controlada alrededor de z se expresa como `qc.crz(lambda_angle, control, target)`. El orden de argumentos es crucial porque el primer índice es el control y el segundo es el objetivo.

Interpretación pedagógica

La línea de código representa una transformación de fase condicionada. No debe interpretarse como una instrucción clásica que mira el control y decide; es una operación unitaria sobre el registro completo.



Lectura física

Una compuerta controlada hace que la evolución del objetivo dependa coherentemente de la rama del control. En el caso de CRZ, esa dependencia se manifiesta como una fase adicional en la rama activada.

Alcance del módulo

Aquí se usa CRZ para entender fases condicionadas. El estudio detallado de circuitos de varios qubits y correlaciones profundas queda fuera de esta unidad.



Problema que resuelve

Una lista de amplitudes complejas puede ocultar relaciones geométricas. La visualización de Bloch permite detectar rápidamente si un estado está cerca de un polo, en el ecuador, o si difiere de otro solo por una rotación de fase.

Uso académico

La visualización no reemplaza el cálculo. Sirve para verificarlo, interpretarlo y detectar errores de convención en ángulos, fases o ejes de rotación.



Latitud

La altura del vector indica el sesgo de medición en la base computacional. La parte superior favorece 0, la inferior favorece 1 y el ecuador representa probabilidades iguales.

Longitud

La dirección horizontal codifica la fase relativa. Dos puntos en el ecuador pueden tener las mismas probabilidades y, sin embargo, responder de manera diferente ante Hadamard.



Procedimiento

Primero se estima la latitud para obtener θ . Después se lee la longitud para obtener ϕ . Finalmente se escribe el estado como $\cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |1\rangle$.

Interpretación

Este método traduce una imagen geométrica en una expresión algebraica. Es útil para comparar salidas de visualización y resultados de simulación.



Problema

Una imagen muestra un vector con amplitud de $|0\rangle$ mayor que la de $|1\rangle$ y longitud cercana a $\pi/2$.

Idea ilustrada

La latitud determina módulos; la longitud determina fase relativa. Si $\theta = \pi/3$ y $\phi = \pi/2$, el estado se escribe $\cos(\pi/6) |0\rangle + i \sin(\pi/6) |1\rangle$.

Conclusión

La lectura visual exige separar dos informaciones: balance probabilístico y orientación de fase.



Problema

Comparar $|\psi\rangle$ y $-|\psi\rangle$ en la esfera.

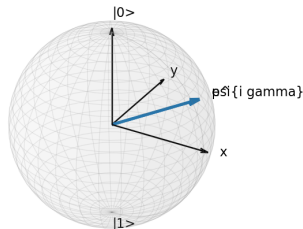
Idea cuántica ilustrada

Aunque los vectores algebraicos apuntan en sentidos opuestos en el espacio vectorial complejo, representan el mismo punto de Bloch porque difieren por una fase global.

Conclusión

La esfera representa estados físicos. Por eso identifica clases de equivalencia, no vectores crudos.

Fase global: mismo punto físico



Distinción terminológica

Multiplicar todo el vector por una fase común produce equivalencia física. En cambio, multiplicar solo una componente de la base computacional modifica la fase relativa y normalmente cambia el estado físico.

Ejemplo conceptual

Los estados $(|0\rangle - i|1\rangle)/\sqrt{2}$ y $(|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$ no difieren por una fase global: tienen la misma latitud, pero longitudes distintas.



Enunciado

Decida si $|\psi\rangle$ y $i|\psi\rangle$ son físicamente equivalentes.

Desarrollo

El segundo estado se obtiene multiplicando todas las amplitudes por el mismo número complejo de módulo uno. Para cualquier observable, las probabilidades calculadas no cambian.

Interpretación

Ambos estados ocupan el mismo punto de Bloch. La diferencia es una fase global, no una distinción física.



Enunciado

Compare $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ y $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$.

Desarrollo

No existe un único factor $e^{i\gamma}$ que transforme simultáneamente la primera amplitud en la primera y la segunda en la segunda. La diferencia está solo en una componente, por lo que cambia la fase relativa.

Interpretación

Los estados tienen igual medición inmediata en la base computacional, pero son distinguibles mediante una operación de cambio de base.



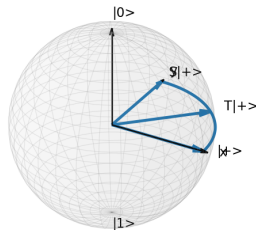
Motivación

Una trayectoria muestra más que el estado inicial y final. Permite ver si una operación cambia latitud, longitud o ambas, y ayuda a detectar el eje de rotación.

Uso en este módulo

Se usarán trayectorias para interpretar Pauli, Hadamard y compuertas de fase. Esto conecta matrices unitarias con evolución geométrica.

Compuertas de fase: avances alrededor de z



Problema

Partir de un estado ecuatorial y aplicar rotaciones sucesivas alrededor de z .

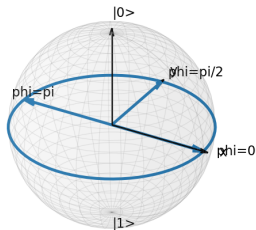
Idea cuántica ilustrada

La trayectoria permanece en el ecuador porque las probabilidades de 0 y 1 no cambian. Solo cambia la fase relativa, que aparece como longitud.

Conclusión

Las rotaciones alrededor de z son operaciones de fase; su efecto se ve geométricamente aunque no modifique la medición inmediata en la base computacional.

Fase relativa: movimiento sobre el ecuador



Problema

Entender por qué Hadamard puede convertir información de fase en probabilidad.

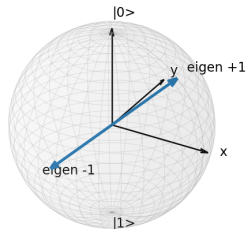
Idea cuántica ilustrada

Hadamard no rota alrededor del eje z . Al mezclar polos y ecuador, cambia qué coordenada de la esfera queda asociada a la medición computacional.

Conclusión

Hadamard es una herramienta de lectura: transforma ciertos contrastes de fase en diferencias de población medibles.

Eje geométrico de Hadamard



Problema

Dado un estado inicial, diferentes conjuntos de compuertas generan diferentes subconjuntos de puntos en la esfera. Algunas familias solo cambian fase, mientras otras también cambian latitud.

Interpretación

Compuertas de fase como S y T mueven estados alrededor de z . Hadamard permite salir de una latitud fija. Por eso combinar Hadamard con fases produce una exploración más rica de la esfera.



Ejercicio guiado: por qué H y Z son complementarios

Tipo: Ejercicio

Enunciado

Explique por qué la combinación de Hadamard y Z puede generar cambios que no se obtienen aplicando solo Z a $|1\rangle$.

Desarrollo

Aplicar solo Z a $|1\rangle$ produce $-|1\rangle$, que es físicamente equivalente a $|1\rangle$. Hadamard mueve el estado fuera del polo; entonces Z modifica una fase relativa observable después.

Interpretación

Una compuerta de fase necesita superposición para mostrar contenido físico no trivial.



Objetivo

El código debe permitir preparar amplitudes, aplicar compuertas y extraer el vector de estado. En este módulo, la simulación se usa para comparar álgebra y geometría.

Práctica

El notebook incluye funciones para convertir de estado a vector de Bloch, graficar trayectorias y contrastar visualizaciones de Qiskit con gráficas de Matplotlib.



Herramienta

Qiskit ofrece funciones como `plot_bloch_vector` y `plot_bloch_multivector`. Estas visualizaciones son útiles para inspeccionar el efecto de compuertas unitarias.

Interpretación

La imagen debe leerse como estado físico de un qubit, no como dibujo decorativo. La dirección del vector resume probabilidades y fase relativa.



Motivación

Matplotlib permite generar diagramas personalizados para comparar estados, dibujar trayectorias y anotar ángulos. Es especialmente útil cuando se desea explicar el movimiento, no solo el punto final.

Uso en el notebook

Se incluyen funciones propias para calcular vectores de Bloch desde amplitudes, graficar esferas, comparar fases globales y relativas, y visualizar rotaciones paso a paso.



Problema

Ver cómo una compuerta que no cambia probabilidades en la base computacional sí cambia la posición del estado.

Procedimiento

Se prepara $|+\rangle$ con Hadamard y se aplica S . La medición inmediata en la base computacional sigue dando probabilidades iguales, pero el vector de Bloch rota hacia el eje $+y$.

Conclusión

La visualización muestra la fase relativa que la estadística de medición directa no revela por sí sola.



Problema

Comparar una rotación de $\pi/4$ con una de $\pi/2$ alrededor de z .

Procedimiento

Se prepara $|+\rangle$ y se aplica T . El vector avanza la mitad de lo que avanzaría bajo S .

Conclusión

T introduce una fase más fina. Esta granularidad es importante para construir circuitos con control más preciso de interferencias.



Problema

Interpretar una fase condicional en un circuito de dos qubits sin entrar en circuitos complejos.

Procedimiento

Se prepara un registro sencillo, se aplica `crz(lambda_angle, control, target)` y se compara el vector de estado antes y después. La fase aparece solo en las componentes cuyo control activa la operación.

Conclusión

CRZ muestra que una fase puede estar condicionada de forma coherente. Esa idea prepara el terreno para circuitos más avanzados, pero aquí se estudia como operación elemental.



Objetivo

El notebook compara $|\psi\rangle$ con $e^{i\gamma}|\psi\rangle$ mediante sus vectores de Bloch y probabilidades.

Interpretación

Si ambos producen el mismo vector de Bloch y las mismas probabilidades para cualquier medición, la diferencia corresponde a fase global. Esto evita interpretar salidas de simulador como diferencias físicas inexistentes.



Objetivo

El notebook compara estados con los mismos módulos y distinta fase relativa. Las probabilidades directas en la base computacional coinciden, pero las probabilidades después de Hadamard difieren.

Interpretación

La simulación confirma una idea física central: la fase relativa es real en el sentido operacional porque puede cambiar resultados medibles bajo un procedimiento adecuado.



Diagnóstico

Si un cálculo concluye que $|\psi\rangle$ y $-|\psi\rangle$ se distinguen por medición, hay una confusión entre vector algebraico y estado físico.

Corrección

Una fase común no afecta productos internos de probabilidad ni posición en la esfera de Bloch. La distinción observable requiere cambio de fase relativa o cambio de módulos.



Diagnóstico

La fase relativa puede parecer irrelevante si se mira solo una medición en la base computacional. Esa conclusión es incompleta.

Corrección

La fase relativa se manifiesta cuando el circuito cambia de base. Hadamard, por ejemplo, convierte diferencias de fase entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$ en diferencias de probabilidad.



Diagnóstico

La esfera de Bloch no es una trayectoria física ordinaria de una partícula en el espacio. Es una representación del estado cuántico abstracto de un qubit.

Corrección

Su utilidad está en traducir amplitudes y fases a una geometría de probabilidades y transformaciones unitarias. La esfera representa información de estado, no posición espacial del sistema físico.



Diagnóstico

Pensar que CRZ mide el control y luego decide una operación es incorrecto. Esa interpretación rompería la coherencia de la evolución.

Corrección

CRZ es una operación unitaria controlada. Actúa linealmente sobre superposiciones y modifica fases de ramas específicas sin realizar una medición.



Enunciado

Se prepara $|+\rangle$, se aplica S , luego Hadamard y se mide. Explique por qué el resultado no se obtiene mirando solo la probabilidad inicial.

Desarrollo

Después de S , el estado tiene amplitudes de igual módulo y fase relativa $\pi/2$. Hadamard mezcla esas amplitudes y convierte la fase en una diferencia de probabilidades.

Interpretación

El circuito ilustra la cadena conceptual completa: superposición, ajuste de fase, cambio de base e interferencia observable.



Enunciado

Dos estados tienen el mismo punto de Bloch. ¿Qué relación debe existir entre sus vectores algebraicos?

Desarrollo

Si representan el mismo estado puro de un qubit, sus vectores normalizados deben diferir solo por un factor global $e^{i\gamma}$.

Interpretación

La igualdad geométrica identifica equivalencia física. En cambio, dos puntos distintos de Bloch implican que existe algún procedimiento de medición capaz de distinguir los estados.



Enunciado

Una visualización muestra un estado en el ecuador que rota al aplicar T . ¿Qué cambia y qué permanece fijo?

Desarrollo

Permanece fija la coordenada z , por lo que las probabilidades de 0 y 1 no cambian. Cambia la longitud, lo que equivale a cambiar la fase relativa.

Interpretación

El ejemplo muestra por qué una compuerta de fase puede ser invisible para una medición inmediata y aun así ser esencial para la evolución posterior del circuito.



Álgebra

Las matrices y vectores dan la descripción exacta. Permiten calcular estados, productos internos, probabilidades y composición de compuertas sin ambigüedad.

Geometría

La esfera de Bloch revela estructura: fases relativas, ejes de rotación, invariantes y trayectorias.

Código

Python y Qiskit permiten verificar ambas representaciones y construir una práctica reproducible de análisis de estados de un qubit.



Por qué

La esfera aparece porque el estado físico de un qubit puro tiene dos parámetros reales después de normalizar y eliminar fase global.

De dónde sale la fórmula

La parametrización surge de escribir las magnitudes como coseno y seno de medio ángulo y reservar la fase restante como longitud azimutal.

Qué significa físicamente

Las compuertas unitarias preservan norma y mueven el estado sobre la esfera; la medición lee probabilidades asociadas a la dirección del vector.



Continuidad

El control de fase y la interpretación geométrica serán herramientas para estudiar circuitos más grandes, interferencia algorítmica y transformaciones más complejas.

Alcance actual

En esta unidad se consolidan estados puros de un qubit, fases, compuertas de un qubit y una operación controlada de fase. No se requiere todavía entrar en entrelazamiento profundo ni algoritmos de oráculo.



Idea central

Un qubit no es solo una distribución de probabilidad sobre 0 y 1. Es un objeto geométrico gobernado por amplitudes complejas, donde la fase relativa determina cómo se comportará el estado ante futuras transformaciones.

Resultado académico

Al finalizar, el estudiante debe poder leer un estado en forma algebraica, ubicarlo en la esfera de Bloch, predecir el efecto de Pauli, Hadamard, S, T y CRZ, y verificar sus conclusiones mediante Python o Qiskit.



Problema que resuelve

La medición en la base computacional solo observa módulos de amplitud. Dos estados con los mismos módulos pueden comportarse de manera distinta si antes se aplica una compuerta que mezcle las amplitudes.

Papel dentro del módulo

Esta distinción justifica por qué la fase relativa no es un adorno algebraico. Puede no aparecer en una medición inmediata, pero se vuelve observable cuando el circuito cambia de base.



Problema

Comparar dos estados ecuatoriales con probabilidades iguales para 0 y 1, pero con longitudes distintas en la esfera de Bloch.

Idea cuántica ilustrada

La latitud fija las probabilidades de medición en la base computacional; la longitud fija la fase relativa. Por eso ambos estados pueden tener la misma estadística directa y, aun así, responder de forma distinta ante Hadamard.

Conclusión

La esfera de Bloch separa visualmente información probabilística e información de fase. Esa separación es central para interpretar compuertas de fase.



Enunciado

Considere una operación CRZ con un qubit de control y uno objetivo. Explique sobre qué ramas de la base computacional puede aparecer una fase condicionada.

Desarrollo

La operación controlada solo modifica la parte del estado asociada al control activo. Si el control no está en la rama que activa la compuerta, la componente correspondiente permanece sin la fase adicional.

Interpretación

CRZ no mide el control. Mantiene coherencia entre ramas y por eso puede usarse para construir dependencias de fase en circuitos más extensos.



Enunciado

Parta de un estado ecuatorial y compare conceptualmente el efecto de aplicar S y de aplicar T .

Desarrollo

Ambas compuertas rotan alrededor del eje z , por lo que conservan la latitud y las probabilidades en la base computacional. La diferencia es el ángulo de avance: S produce un cuarto de vuelta y T produce un octavo de vuelta.

Interpretación

La familia de compuertas de fase permite controlar de manera discreta la longitud del estado sobre la esfera. Ese control es la base de muchas construcciones posteriores.



Secuencia de análisis

Primero se verifica la normalización. Después se separan módulos y fase relativa. Finalmente se interpreta el punto en la esfera de Bloch y se decide qué compuerta o medición hará observable la propiedad de interés.

Valor académico

Este criterio conecta álgebra, geometría y código. Evita estudiar las compuertas como recetas aisladas y permite razonar sobre la evolución unitaria de un qubit.

