

DFT y QFT

Transformadas de Fourier, fases
e implementación cuántica

De análisis espectral clásico a circuitos cuánticos de Fourier



Punto de partida

Partimos de números complejos, amplitudes, fases y qubits como conceptos ya establecidos. El nuevo objeto de estudio es una transformación de base que convierte patrones discretos en información espectral y que, en computación cuántica, actúa directamente sobre amplitudes.

Estructura

Primero se estudia Fourier como lenguaje de frecuencia para señales discretas. Después se formaliza la DFT unitaria, se interpreta la QFT como la misma matriz aplicada a estados cuánticos y se construye el circuito con Hadamards, fases controladas y permutación del orden de bits.



Competencia matemática

Debemos formular la DFT unitaria, interpretar la matriz de Fourier, calcular ejemplos pequeños, reconocer la ortogonalidad de las raíces de la unidad y explicar por qué la normalización convierte la DFT en una operación unitaria.

Competencia cuántica

Debemos definir la QFT, interpretar su acción sobre estados base, analizar el papel de las fases fraccionarias y construir manualmente circuitos QFT en Qiskit y Cirq para verificar su equivalencia con la matriz DFT.



Base matemática

Se utilizarán espacios vectoriales complejos, producto interno, norma, matrices unitarias y notación de Dirac. No se repetirá la introducción a números complejos ni la explicación básica de amplitudes; se emplean como lenguaje de trabajo.

Base computacional

Usaremos NumPy para matrices complejas, Matplotlib para señales y espectros, y frameworks cuánticos para circuitos pequeños. La finalidad es observar cómo una misma estructura de fase aparece en álgebra, geometría y simulación.



Pregunta central

Fourier responde cómo expresar una señal o vector como combinación de oscilaciones elementales. En lugar de mirar solo valores individuales, busca componentes de frecuencia que expliquen la estructura global.

Valor conceptual

Este cambio de perspectiva convierte información local en información estructural. Muchos fenómenos físicos y de cómputo son más simples al describirse por modos, frecuencias o fases.



Origen

La idea de Fourier nació en el análisis de fenómenos continuos como calor y vibraciones, donde una forma compleja puede entenderse como suma de modos armónicos simples.

Proyección moderna

La misma intuición atraviesa procesamiento de señales, análisis espectral, compresión, solución de ecuaciones diferenciales y algoritmos cuánticos.

La QFT hereda esa filosofía: una base adecuada puede hacer visible una estructura oculta.



Dos descripciones

Una señal discreta puede describirse por sus muestras o por las frecuencias que la componen.

La descripción temporal responde qué valor aparece en cada índice; la descripción espectral responde qué patrones oscilatorios están presentes.

Papel de la transformada

La DFT no crea información nueva.

Reorganiza la información en una base donde las regularidades periódicas tienden a concentrarse y los patrones incompatibles tienden a cancelarse.



Problema

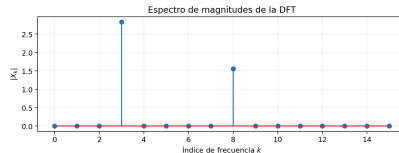
La señal del ejemplo combina varias oscilaciones y no revela de inmediato sus componentes.

El espectro separa esas contribuciones y muestra picos en las frecuencias dominantes.

Conclusión

La DFT actúa como analizador de componentes.

Lo que en el dominio original aparece mezclado puede quedar separado en el dominio de frecuencia.



Idea esencial

Las frecuencias discretas se representan mediante potencias de raíces de la unidad.
Cada frecuencia es una secuencia de fases que gira con una velocidad angular distinta.

Por qué son complejas

El plano complejo permite codificar amplitud y fase en una sola expresión. Esto evita separar artificialmente senos y cosenos, y permite describir rotaciones mediante multiplicación.



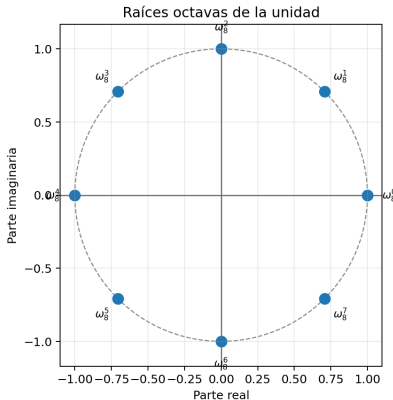
Definición

Para un tamaño N , la raíz fundamental es una rotación de ángulo 2π dividido entre N . Sus potencias recorren N puntos igualmente espaciados sobre el círculo unitario.

Interpretación geométrica

La DFT compara una señal contra esos patrones de giro. Si las contribuciones apuntan de forma coherente, el coeficiente se refuerza; si rodean el círculo de manera equilibrada, se cancelan.

$$\omega_N = e^{2\pi i/N}, \quad \omega_N^N = 1.$$

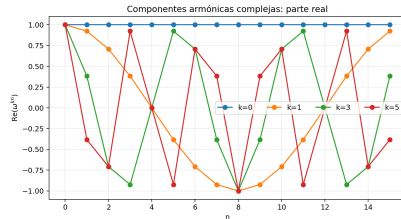


Base de Fourier

La DFT expresa un vector de datos como combinación de vectores oscilatorios. Cada vector de la base representa una frecuencia discreta permitida por la longitud N .

Lectura física

En vibraciones, cada frecuencia corresponde a un modo. En computación cuántica, la misma matemática describe patrones de fase sobre estados base.



Problema que resuelve

Un vector puede estar disperso en la base estándar y ser simple en la base de Fourier. La utilidad de Fourier es cambiar la pregunta: no solo qué valores tiene el vector, sino qué oscilaciones lo componen.

Implicación para QFT

La QFT será un cambio de base unitario. Es poderosa cuando la información del problema está codificada como periodicidad o fase, no como un valor aislado que pueda leerse directamente.



Panorama clásico

Fourier aparece en filtrado de señales, audio, imagen, cristalografía, ecuaciones diferenciales y métodos espectrales.

En todos esos casos, la frecuencia revela regularidades que no son obvias en el dominio original.

Puente cuántico

En algoritmos cuánticos, la información útil puede estar codificada en fases acumuladas.

Fourier proporciona el lenguaje para transformar fases y periodicidades en distribuciones de medición.



Objeto de entrada

La DFT toma un vector complejo finito y produce otro vector complejo del mismo tamaño. Cada componente de salida es una suma ponderada por fases.

Idea de lectura

El índice k de salida no es una posición temporal sino una frecuencia discreta. La DFT cambia la interpretación de los componentes del vector.



Transformada unitaria

Para un vector x de longitud N , la DFT unitaria produce coeficientes X_k mediante una suma de fases. El factor de normalización hace que la transformación preserve norma.

Interpretación

Cada coeficiente mide alineación con una oscilación de frecuencia k .
La suma compleja funciona como un detector de fase.

$$X_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{2\pi i kn/N}.$$

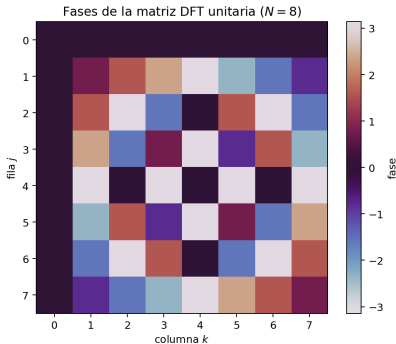
Estructura

La DFT puede representarse por una matriz F_N .
Sus entradas tienen igual magnitud y fases organizadas por productos de índices.

Lectura visual

La matriz no es arbitraria: cada fila avanza con un ritmo de giro distinto. Esa regularidad produce ortogonalidad entre frecuencias.

$$[F_N]_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \omega_N^{kn}.$$

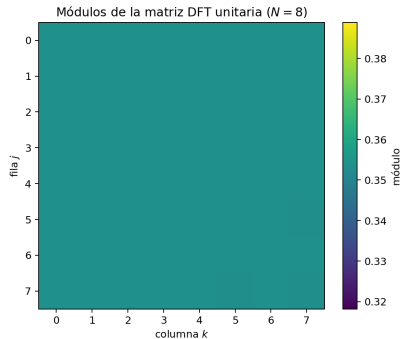


Hecho estructural

Todas las entradas de la DFT unitaria tienen módulo 1 sobre raíz de N . La diferencia entre filas no está en el tamaño de los términos, sino en sus fases.

Implicación

La transformación redistribuye información mediante interferencia de fases. Este punto prepara la transición hacia QFT, donde esa matriz actuará sobre amplitudes.



Idea

Dos filas distintas de la matriz DFT representan patrones de giro incompatibles.

Al tomar su producto interno, las fases se distribuyen alrededor del círculo y la suma se cancela.

Consecuencia

Esta ortogonalidad permite que la DFT se interprete como cambio de base.

Cada frecuencia aporta una coordenada independiente del vector original.

$$\sum_{n=0}^{N-1} \omega_N^{(k-\ell)n} = 0 \quad \text{si } k \neq \ell.$$



Propiedad fundamental

Con la normalización unitaria, la matriz DFT satisface $F^\dagger F$ igual a la identidad. Por tanto, conserva norma, producto interno y energía total.

Importancia cuántica

Una evolución cuántica cerrada debe ser unitaria. Por eso la DFT normalizada puede interpretarse como operador cuántico ideal.

$$F_N^\dagger F_N = I.$$

Definición

La inversa de la DFT se obtiene conjugando las fases.
Matemáticamente es la adjunta de la matriz DFT unitaria.

Interpretación

No hay pérdida de información. El paso al dominio de frecuencia reorganiza el vector, y la transformada inversa recupera la descripción original.

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{-2\pi i kn/N}.$$

Diferencia común

Algunos textos usan fase positiva para la DFT directa y otros usan fase negativa.
Ambas convenciones son válidas si se define la inversa de manera consistente.

Diagnóstico

Cuando un resultado parece conjugado o invertido, antes de buscar un error de cálculo conviene revisar qué convención de signo se está usando.



Ejemplo mínimo: DFT de dos componentes

Tipo: Ejemplo

Problema

Tomamos el vector columna formado por 3 y 4.
La DFT unitaria de tamaño dos separa un componente uniforme y un componente alternante.

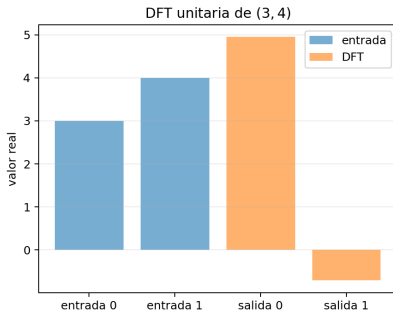
Desarrollo conceptual

El primer coeficiente suma las dos entradas; el segundo resta la segunda de la primera. La salida no es una lista arbitraria, sino la descomposición en dos patrones elementales.

$$F_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Resultado

La salida es 7 sobre raíz de 2 y menos 1 sobre raíz de 2. Esto indica un modo uniforme dominante y un contraste pequeño.



Lectura matemática

La DFT de dos puntos tiene solo dos detectores: uno uniforme y otro alternante. Cualquier vector de dos componentes se descompone en esos dos patrones.

Lectura cuántica

Este caso es el antecedente directo de Hadamard. La compuerta Hadamard es la transformada de Fourier sobre dos puntos, y por eso aparece como bloque local dentro de la QFT.

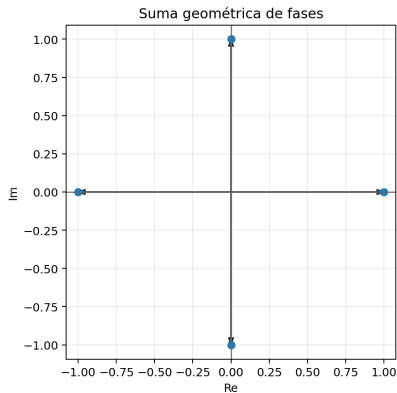


Problema

Entender por qué una frecuencia incompatible puede desaparecer en una suma de Fourier.

Idea ilustrada

Las flechas complejas asociadas a fases igualmente distribuidas pueden rodear el círculo y sumar cero. La cancelación es una suma vectorial concreta en el plano complejo.



Conclusión

Fourier detecta estructura porque convierte alineación de fases en magnitud de coeficiente y desalineación en cancelación.

Función

Cada fila de la matriz DFT compara la señal contra una frecuencia.
Si la señal se parece a esa fila, el coeficiente correspondiente crece.

Interpretación

La DFT no solo calcula números. Construye una batería de detectores de patrones de fase.



Propiedad

Transformar una suma de señales equivale a sumar sus transformadas.

Esta linealidad hace posible analizar componentes por separado y luego recombinarlas.

Relevancia cuántica

La QFT también es lineal. Por tanto, su acción sobre una superposición se obtiene combinando la acción sobre estados base.



Fenómeno

Un desplazamiento circular en el dominio original no destruye el contenido espectral; introduce factores de fase en el dominio de frecuencia.

Importancia

Esto muestra que la fase codifica información estructural.

En algoritmos cuánticos, muchos datos relevantes aparecen precisamente como fases.



Idea clásica

Fourier convierte convolución en multiplicación. Esa propiedad simplifica filtrado y análisis de sistemas lineales.

Lectura amplia

Una transformación adecuada puede volver simple una operación complicada.
La QFT será útil por la misma razón: el cambio de base revela estructura.



Costo directo

Calcular la DFT mediante multiplicación de matriz requiere típicamente N^2 operaciones. Para señales grandes, esto puede ser costoso.

FFT

La transformada rápida de Fourier reduce el costo clásico usando la estructura recursiva de las raíces de la unidad. La QFT usa otra forma de estructura: un circuito compacto sobre amplitudes cuánticas.



Enunciado

Interpretar la DFT unitaria de tamaño dos para el vector formado por 5 y 1.

Desarrollo

El primer coeficiente suma 5 y 1, mientras el segundo resta 1 de 5.
Por tanto, la salida separa nivel común y diferencia alternante.

Conclusión

La lectura de Fourier no se reduce a aritmética.
El primer modo captura uniformidad y el segundo captura contraste.

$$F_2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/\sqrt{2} \\ 4/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Diferencia clave

Una computadora clásica calcula y almacena explícitamente todos los coeficientes de Fourier.
Una computadora cuántica puede aplicar la matriz de Fourier a amplitudes, pero una medición no revela todos los coeficientes.

Consecuencia

La QFT no reemplaza a la FFT como herramienta para imprimir un espectro clásico.
Su valor aparece cuando se integra en un algoritmo que necesita extraer una propiedad global.



Misma matriz, otra operación

La QFT usa la misma matriz unitaria que la DFT, pero actúa sobre el vector de amplitudes de un estado cuántico.

Cambio de significado

La salida no es un arreglo de números accesible directamente.
Es un estado cuántico que debe interpretarse dentro de un circuito mayor.



Comparación

En la DFT, entrada y salida son listas clásicas. En la QFT, entrada y salida son estados cuánticos. La matriz es la misma, pero la forma de acceder a la información no lo es.

Conclusión

La QFT debe entenderse como cambio de base físico sobre amplitudes, no como una función que devuelve una tabla de coeficientes.

DFT y QFT: misma matriz, distinta lectura operacional



Operador

Para N igual a 2 elevado a n , la QFT se define sobre estados base como una superposición uniforme con fases dependientes del producto de etiquetas.

Interpretación

La etiqueta de entrada se transforma en un gradiente de fase sobre todas las etiquetas de salida.

$$\mathcal{F}_N |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{y=0}^{N-1} e^{2\pi i xy / N} |y\rangle .$$

Linealidad

Como todo operador cuántico, la QFT se extiende linealmente. Si un estado tiene amplitudes a_x , la salida es la combinación de las QFT de cada estado base ponderadas por esas amplitudes.

Implicación

La QFT actúa sobre el vector de amplitudes completo. Esa acción puede generar interferencia entre contribuciones que en la base computacional estaban separadas.

$$\mathcal{F}_N \sum_x a_x |x\rangle = \sum_x a_x \mathcal{F}_N |x\rangle .$$



Paisaje de fases

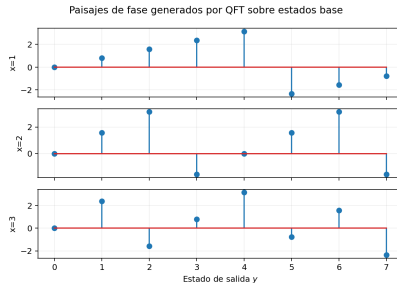
La QFT de un estado base produce amplitudes de igual módulo y fases que avanzan regularmente.

La información de la etiqueta x queda en la pendiente de ese avance.

Lectura física

Una medición directa daría una distribución uniforme.

El valor está en la fase, que puede interferir con otras fases en un algoritmo mayor.



Problema

Para dos qubits, N es 4 y el estado 01 corresponde a la etiqueta x igual a 1.
La QFT produce cuatro términos con fases cuarta raíz de la unidad.

Resultado

La salida tiene amplitudes 1, i , menos 1 y menos i divididas entre 2.

Interpretación

El estado de salida no privilegia una etiqueta por probabilidad.
Codifica la entrada en una secuencia de fases.

$$\mathcal{F}_4 |01\rangle = \frac{1}{2} (|00\rangle + i|01\rangle - |10\rangle - i|11\rangle).$$

Lectura matemática

La salida corresponde a una fila de la matriz Fourier de tamaño cuatro escrita como estado cuántico.

Lectura física

Medir inmediatamente produce una etiqueta aleatoria con probabilidad uniforme.
La estructura útil no está en las probabilidades, sino en las fases relativas.



Problema que resuelve

Muchos estados cuánticos relevantes codifican información en fases, no en probabilidades visibles. La QFT reorganiza esas fases para que ciertos patrones puedan convertirse en amplitudes concentradas.

Alcance

Esta idea será esencial en algoritmos posteriores, pero aquí se estudia solo la herramienta matemática y circuital.

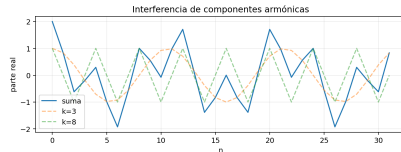


Mecanismo

La QFT suma contribuciones complejas con fases controladas. Si las fases se alinean para una etiqueta de salida, aparece interferencia constructiva; si se distribuyen de manera equilibrada, aparece cancelación.

Lectura computacional

La distribución final no es casualidad. Es el resultado de una suma coherente de caminos de fase.



Justificación mínima

La QFT usa la DFT normalizada. Como las columnas de esa matriz son ortonormales, la operación es unitaria.

Significado

La operación puede implementarse por un circuito cuántico ideal porque conserva norma y productos internos. No borra información; cambia la base.

$$\mathcal{F}_N^\dagger \mathcal{F}_N = I.$$



Definición

La inversa de la QFT reemplaza cada fase por su conjugada. Es la adjunta de la matriz QFT.

Papel algorítmico

En aplicaciones posteriores, la QFT inversa convierte fases acumuladas en etiquetas medibles. Aquí se introduce como operación inversa de cambio de base.

$$\mathcal{F}_N^{-1} = \mathcal{F}_N^\dagger.$$

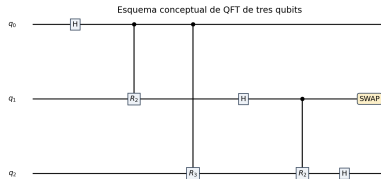


Arquitectura

El circuito QFT implementa la matriz de Fourier sin escribir una matriz exponencialmente grande. Usa Hadamards, fases controladas y SWAPs.

Idea computacional

La fase total puede descomponerse bit a bit. Cada compuerta controlada aporta una fracción de la fase que corresponde a la expansión binaria.



Idea

La QFT sobre un estado base puede factorizarse en qubits individuales con fases fraccionarias. Esta factorización explica la estructura del circuito.

Interpretación

Las compuertas controladas de fase no son adornos. Insertan las fracciones necesarias para reconstruir la fase de Fourier.



Función local

Hadamard crea el contraste local entre cero y uno en el qubit tratado.
Luego las fases controladas ajustan ese contraste usando información de otros bits.

Interpretación

Dentro de QFT, Hadamard es una puerta de entrada a la base de fase.
Su efecto se completa con compuertas controladas.

Problema que resuelven

La QFT requiere fases que dependen de pares de bits. Una compuerta controlada de fase modifica solo el componente que satisface la condición de control.

Lectura física

La compuerta puede no cambiar probabilidades inmediatas, pero cambia la geometría de fases que determinará interferencia posterior.



Definición

La compuerta CR2 aplica una fase de ángulo π sobre 2 al componente activado por control y objetivo.

Significado geométrico

Ese componente gira un cuarto de vuelta en el plano complejo.

La fase fraccionaria es esencial para construir la QFT de más de un qubit.

$$e^{2\pi i/2^2} = e^{i\pi/2} = i.$$



Enunciado

Aplicar CR2 al estado formado por la superposición de 01 y 11, asumiendo que solo 11 activa la fase controlada.

Desarrollo

El componente 01 queda sin cambio. El componente 11 recibe la fase i .

Resultado e interpretación

La probabilidad de cada componente permanece igual, pero la fase relativa cambia. Esa es la función de una fase controlada dentro de QFT.

$$\frac{|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \mapsto \frac{|01\rangle + i|11\rangle}{\sqrt{2}}.$$

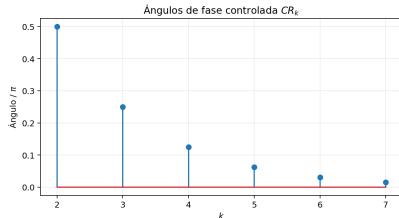
Familia de fases

La QFT usa una jerarquía de compuertas CRk con ángulos cada vez más pequeños. A mayor k, más fina es la corrección de fase.

Implicación

Las fases pequeñas codifican bits menos significativos. Por eso algunas versiones aproximadas de QFT omiten fases muy pequeñas cuando se acepta error controlado.

$$CR_k : \theta_k = \frac{2\pi}{2^k}.$$



Construcción

En Cirq, CRk puede representarse con CZPowGate usando un exponente que produce la fase deseada sobre el componente controlado.

Lectura conceptual

La línea de código no debe memorizarse como receta aislada.

Lo importante es reconocer que el exponente determina el ángulo de fase.

```
cirq.CZPowGate(exponent = 2/2**k)
```

Componentes principales

El circuito estándar usa Hadamard, compuertas controladas de fase y SWAP. En Cirq, las fases controladas se expresan con CZPowGate; en Qiskit, con compuertas de fase controlada o circuitos equivalentes.

Por qué no bastan Pauli

X, Y y Z por sí solas no proporcionan la jerarquía de fases fraccionarias. La estructura fina de la QFT vive en las compuertas CRk.



Procedimiento

Se procesa un qubit, se aplica Hadamard y se agregan fases controladas desde qubits vecinos. Luego se repite el patrón en el subregistro restante.

Interpretación

Cada etapa escribe una parte de la fase binaria.
La QFT completa ensambla esos fragmentos en un cambio de base global.



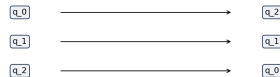
Problema que resuelve

La construcción natural de QFT produce la salida en orden invertido. Los SWAPs finales corrigen la convención de lectura.

Implicación práctica

Si se omiten los SWAPs, el circuito puede ser matemáticamente correcto pero la lectura de cadenas debe invertirse para compararla con la definición estándar.

Inversión de orden mediante SWAP



Conteo

La QFT exacta usa un número cuadrático de compuertas en el número de qubits. Esto es mucho menor que manipular explícitamente una matriz de tamaño exponencial.

Interpretación

La eficiencia del circuito no significa que se puedan leer todos los coeficientes. Significa que el cambio de base se aplica eficientemente al estado.



Motivación

Las fases con k grande son muy pequeñas. En implementaciones ruidosas, omitir algunas puede reducir profundidad de circuito a cambio de un error acotado.

Criterio académico

La aproximación no cambia la idea de QFT; modifica la precisión con la que se implementa la fase total.



Problema

Construir la matriz Fourier de tamaño cuatro con compuertas elementales.

Procedimiento

Se combinan Hadamard, CR2 y SWAP. La fase CR2 introduce el cuarto de vuelta que no aparece en una transformada de tamaño dos.

Conclusión

La matriz de cuatro por cuatro se realiza sin escribir sus dieciséis entradas.
La estructura de fases se reparte entre compuertas locales y controladas.



Estrategia

Para pocos qubits, se puede construir la matriz DFT unitaria y compararla con la matriz producida por el circuito QFT.

Valor pedagógico

La verificación confirma que QFT no es otra transformada.
Es la DFT normalizada implementada como circuito cuántico.



Construcción

Una implementación manual aplica Hadamards, compuertas de fase controlada con ángulos decrecientes y SWAPs finales.

Interpretación

Construirla manualmente permite ver qué fase introduce cada compuerta. Las bibliotecas son útiles, pero pueden ocultar la estructura matemática.

Construcción

En Cirq, las fases controladas pueden expresarse con `CZPowGate`.

El exponente se elige para que el componente controlado reciba el ángulo correspondiente.

Interpretación

La sintaxis de Cirq muestra que gran parte de la QFT consiste en operaciones diagonales de fase combinadas con cambios de base locales.



Problema que resuelve

Los diagramas permiten auditar si el circuito contiene el patrón esperado de Hadamards, fases controladas y SWAPs.

Uso académico

La visualización no reemplaza la definición matemática, pero ayuda a vincular cada fase fraccionaria con una operación concreta sobre qubits.



DFT clásica

Entrada y salida son vectores explícitos en memoria clásica. Si se calcula la DFT, todos los coeficientes pueden inspeccionarse.

QFT cuántica

Entrada y salida son estados cuánticos. La transformación puede aplicarse eficientemente, pero la medición produce muestras.

La QFT se usa como subrutina, no como impresora de espectros completos.



Idea unificadora

DFT y QFT son cambios de base. La base original etiqueta posiciones o enteros; la base de Fourier etiqueta patrones de fase y frecuencia.

Implicación

Un problema se vuelve más simple cuando su estructura natural coincide con la base elegida. La QFT aprovecha estados donde la información ya está codificada en fase.



Descripción

La QFT de un estado base produce un gradiente regular de fase. Todos los módulos son iguales, pero las fases avanzan con una pendiente determinada por la etiqueta de entrada.

Importancia

Los gradientes de fase son portadores de información. Operaciones posteriores pueden convertirlos en concentración de probabilidad.



Lectura física

La QFT suma caminos complejos. Si las fases coinciden para una salida, se refuerzan; si se distribuyen simétricamente, se cancelan.

Lectura computacional

Una salida probable refleja alineación de fases, no una elección arbitraria del circuito.



Problema que resuelven

Para representar frecuencias de alta resolución en registros de n qubits, se necesitan fases como π sobre 2, π sobre 4 y π sobre 8.

Significado geométrico

Cada fase fraccionaria es una rotación condicionada en el círculo complejo.
El circuito QFT compone esas rotaciones para construir la fase total.

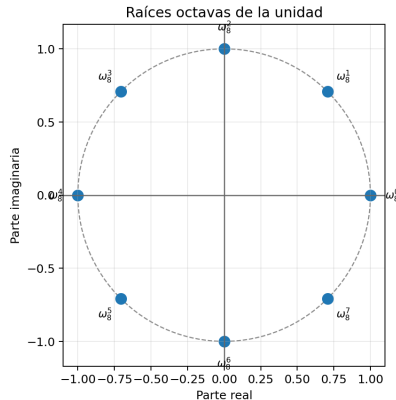


Conexión

Las raíces de la unidad son periódicas: después de N pasos regresan al punto inicial.
Esa periodicidad sostiene la DFT.

Implicación cuántica

Cuando un estado codifica periodicidad en amplitudes o fases, la QFT puede concentrar amplitud en etiquetas relacionadas con esa periodicidad.



Problema

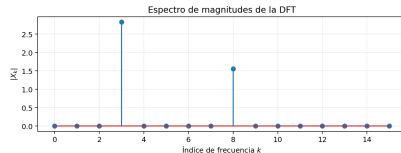
Entender por qué una señal con pocas frecuencias produce pocos picos grandes.

Interpretación

La señal se alinea con ciertos detectores de Fourier. Sus coeficientes crecen mientras otros se reducen por cancelación.

Conclusión

La concentración espectral es compresión estructural.
La QFT explota una versión cuántica de esta idea cuando la estructura está en fases.



Mención controlada

La estimación de fase usa la QFT inversa para convertir fases acumuladas en una cadena de bits medible. No se desarrolla aquí el algoritmo completo.

Mensaje conceptual

La QFT permite leer fases de manera digital.
Ese es el puente entre evolución unitaria e información numérica.



Mención controlada

Los algoritmos de periodicidad usan transformadas de Fourier para convertir repetición en concentración de amplitud. Shor es una aplicación posterior.

Implicación

La QFT no resuelve por sí sola factorización ni estimación.
Proporciona el cambio de base que vuelve visible cierta estructura.



Contexto

En simulación cuántica, fases acumuladas por evolución pueden contener información espectral. Transformadas tipo Fourier ayudan a convertir esas fases en datos sobre frecuencias o energías.

Alcance

Este módulo estudia la herramienta. Las aplicaciones completas requieren preparación de estados, evolución controlada y análisis adicional.



Notebook

El notebook construye matrices DFT, visualiza raíces de la unidad, gráfica señales y espectros, compara DFT y QFT, y verifica circuitos pequeños en Qiskit y Cirq cuando las bibliotecas están disponibles.

Valor pedagógico

La implementación permite observar que la misma estructura de fases aparece en matrices, señales, estados cuánticos y circuitos.



Enunciado

Escribir la matriz DFT unitaria F_4 usando ω_4 igual a i .

Desarrollo

Las filas son los patrones $1,1,1,1$; $1,i,\text{menos } 1,\text{menos } i$; $1,\text{menos } 1,1,\text{menos } 1$; y $1,\text{menos } i,\text{menos } 1,i$, todos multiplicados por $1/2$.

Interpretación

Cada fila es un detector de fase distinto.

La QFT de dos qubits usa esta misma matriz sobre amplitudes.

Enunciado

Para N igual a 4, encontrar el patrón de fases de la QFT de 10.

Desarrollo

La etiqueta 10 corresponde a x igual a 2. Las fases alternan 1, menos 1, 1, menos 1.

Resultado

La salida es una superposición uniforme con patrón alternante.

La información de x igual a 2 queda en la fase, no en las magnitudes.

$$\mathcal{F}_4 |10\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle).$$

Enunciado

Determinar el ángulo de fase de CR4.

Desarrollo

La familia CR k usa el ángulo 2π dividido entre 2 elevado a k .

Para k igual a 4 , el ángulo es π sobre 8 .

Interpretación

CR4 introduce una fase más fina que CR2.

Esa corrección corresponde a bits menos significativos de la fase total.

Enunciado

Un circuito QFT de tres qubits omite los SWAPs finales. ¿Qué efecto conceptual debe esperarse?

Desarrollo

La transformación de fases puede ser correcta, pero los qubits quedan en orden invertido. Para comparar con la definición estándar, se invierte la lectura o se agregan SWAPs.

Conclusión

Una discrepancia de orden puede ser una convención de bits, no un error de Fourier.



Descripción

Usar DFT sin el factor de normalización puede ser habitual en algunos textos clásicos, pero no define directamente una operación cuántica unitaria.

Consecuencia

Para QFT se requiere normalización unitaria. Si se omite, la norma del estado cambia y las probabilidades dejan de ser válidas.



Descripción

Existen convenciones con fase positiva o negativa para la transformada directa.
La matemática es consistente siempre que la inversa use el signo opuesto.

Diagnóstico

Un resultado conjugado suele indicar diferencia de convención, no necesariamente un error conceptual.



Descripción

La QFT factoriza la salida en orden invertido y los frameworks pueden mostrar cadenas con convenciones distintas.

Consecuencia

Toda comparación entre circuito, matriz y resultado debe especificar orden de qubits y bits clásicos.



Descripción

Medir después de QFT no entrega la lista completa de coeficientes.
Entrega una muestra de una distribución.

Implicación

La QFT es útil cuando el circuito está diseñado para que pocas muestras revelen la propiedad buscada.

DFT

Es la transformación espectral definida matemáticamente sobre vectores discretos.

FFT

Es una familia de algoritmos clásicos eficientes para calcular la DFT explícita.

QFT

Es la implementación cuántica unitaria de la matriz DFT sobre amplitudes.
Su función operacional es diferente de imprimir un espectro clásico.



Problema central

Después de QFT, el estado puede contener información distribuida en amplitudes complejas. La medición transforma esa información en una muestra probabilística.

Diseño algorítmico

Un algoritmo que usa QFT debe preparar el estado para que las salidas útiles tengan alta probabilidad. La transformada es una etapa de interferencia.



Secuencia

Identificar estructura, codificarla en amplitudes o fases, aplicar QFT o QFT inversa y medir una etiqueta que revele frecuencia, fase o periodicidad.

Mensaje central

La QFT convierte estructura de fase en estructura de amplitud.
Esa conversión explica su papel en algoritmos cuánticos posteriores.



Sobre DFT

Por qué aparecen raíces de la unidad, qué significa un coeficiente de Fourier, por qué la normalización importa y cómo un espectro revela frecuencias ocultas.

Sobre QFT

Por qué la misma matriz se vuelve una compuerta, qué hacen las fases controladas, por qué se usan SWAPs y por qué una medición no entrega todos los coeficientes.



Idea matemática

Cada coeficiente de Fourier puede verse como una proyección del vector original sobre un modo oscilatorio. Esta interpretación conecta la DFT con producto interno y geometría de espacios vectoriales complejos.

Importancia

La palabra frecuencia no debe entenderse solo como señal en el tiempo. En cualquier vector complejo finito, Fourier construye una base de modos y expresa el vector en esa base.



Dos capas de información

El espectro tiene magnitudes y fases. La magnitud indica fuerza de una frecuencia; la fase indica desplazamiento o alineación del modo respecto a la señal original.

Conexión cuántica

En QFT, las fases no son detalles secundarios. Constituyen la forma en que el circuito almacena y transforma información antes de medir.



Uso de bibliotecas

Las bibliotecas pueden generar QFT automáticamente, lo que es útil para prototipos y simulación. Sin embargo, una caja automática no enseña qué fases se están aplicando.

Uso manual

Construir la QFT manualmente permite verificar cada Hadamard, cada fase controlada y cada SWAP. Este enfoque es más lento, pero pedagógicamente más transparente.



Verificación matricial

Para dos o tres qubits, la matriz del circuito puede compararse con la DFT unitaria correspondiente. Esta comparación confirma la implementación antes de usarla en algoritmos más grandes.

Verificación conceptual

Además de comparar números, debe revisarse si la salida esperada se interpreta correctamente: fases, orden de bits, normalización y medición forman parte de la misma explicación.



Resultado conceptual

La DFT es un cambio de base desde muestras discretas hacia componentes de frecuencia. Sus coeficientes son sumas de fases que se refuerzan o cancelan.

Resultado matemático

Con normalización unitaria, preserva norma y producto interno. Esa propiedad la convierte en antecedente directo de la QFT.



Resultado conceptual

La QFT aplica la matriz DFT a amplitudes cuánticas. Su circuito evita construir la matriz completa usando Hadamards, fases controladas y SWAPs.

Resultado computacional

Es valiosa como subrutina cuando la información relevante está codificada en fase o periodicidad. Su potencia depende del estado preparado antes y de la interpretación de la medición después.



Integración

Fourier une números complejos, fases, álgebra lineal y circuitos cuánticos. La DFT enseña a leer frecuencia en datos discretos; la QFT aplica el mismo cambio de base a amplitudes.

Proyección

Más adelante usaremos esta herramienta para estudiar algoritmos donde la fase se convierte en portadora directa de información computacional.

